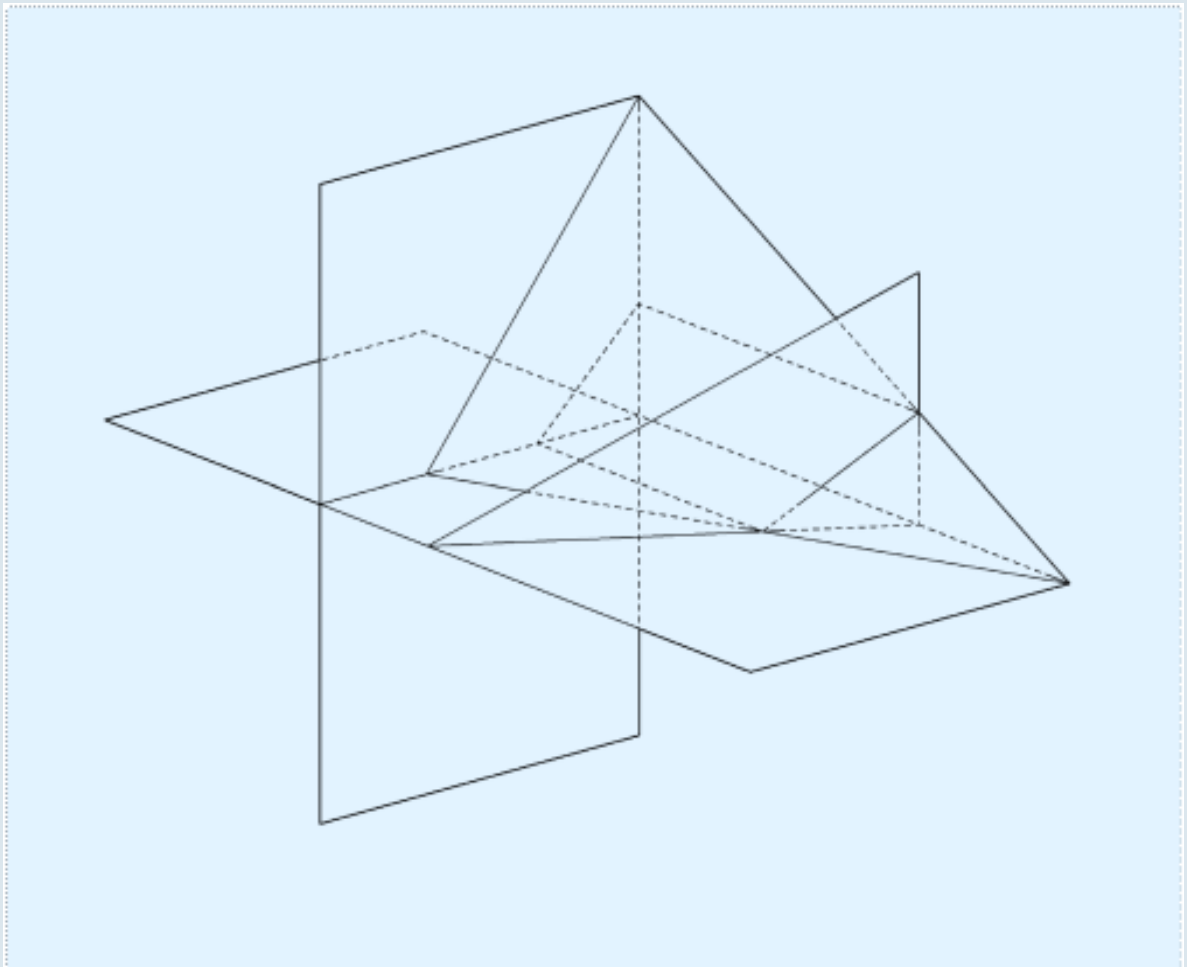


# SISTEMA DIÉDRICO PARA INGENIEROS



DAVID PERIBÁÑEZ MARTÍNEZ

---

# SISTEMA DIÉDRICO PARA INGENIEROS

---

David Peribáñez Martínez

---

# **SISTEMA DIÉDRICO PARA INGENIEROS**

© David Peribáñez Martínez

Valderrebollo 20, 1 A

28031 MADRID

1ª Edición

**Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño de la cubierta, puede reproducirse, almacenarse o transmitirse de ninguna forma, ni por ningún medio, sea eléctrico, químico, mecánico, óptico o digital, de grabación o fotocopia, sin la previa autorización por parte del editor o del autor.**

**Edición, coordinación e ilustración: David Peribáñez Martínez**

**ISBN: 978-84-616-9899-8**

**Edición 1. Mayo 2014.**

# Índice de contenidos

Índice de contenidos	i
Tema 1 Introducción	1
Tema 2 Sistema diédrico o Monge	3
Tema 3 El punto	5
3.1. Representación	5
3.2. Posiciones	6
3.3. Cota, alejamiento y desviación	8
Tema 4 La recta	15
4.1. Representación	15
4.2. Puntos notables de la recta	17
4.3. Posiciones de la recta	21
4.3.1. Recta horizontal	21
4.3.2. Recta frontal	24
4.3.3. Recta paralela a la línea de tierra	27
4.3.4. Recta que corta a LT	29
4.3.5. Recta de perfil (no pasa por LT)	33
4.3.6. Recta vertical	35
4.3.7. Recta de punta	37
4.3.8. Recta genérica o de posición general	39
4.4. Posiciones relativas de dos rectas	41
4.4.1. Rectas que se cortan	41
4.4.2. Rectas paralelas	43
Tema 5 El plano	45
5.1. Representación	45
5.2. Posiciones de un plano	52
5.2.1. Plano horizontal	52
5.2.2. Plano frontal	54
5.2.3. Plano proyectante horizontal	56

5.2.4.	Plano proyectante vertical.....	58
5.2.5.	Plano de perfil.....	60
5.2.6.	Plano proyectante de perfil o plano rampa.....	61
5.2.7.	Plano perpendicular al primer bisector.....	64
5.2.8.	Plano perpendicular al segundo bisector.....	66
5.2.9.	Plano de posición general u oblicua.....	68
5.3.	Rectas notables del plano.....	70
5.3.1.	Recta horizontal.....	70
5.3.2.	Rectas frontales.....	72
5.3.3.	Recta de máxima pendiente.....	74
5.3.4.	Recta de máxima inclinación.....	76
<b>Tema 6</b>	<b>Intersecciones</b> _____	<b>79</b>
6.1.	Intersecciones entre planos.....	79
6.1.1.	Caso particular: Planos que se cortan fuera de los límites del papel.....	81
6.1.2.	Planos dados por tres puntos no alineados y cuatro puntos no alineados.....	84
6.2.	Intersecciones entre recta y plano.....	97
6.2.1.	Intersección de recta y plano definido por tres puntos.....	99
6.3.	Recta que corta o se apoya en otras tres rectas que se cruzan.....	100
6.3.1.	Intersección de un plano con una recta paralela a LT.....	103
6.3.2.	Intersección de un plano con una recta que pasa por la LT.....	104
6.3.3.	Intersección de un plano con una recta de perfil.....	105
6.3.4.	Intersección de una recta con planos proyectantes.....	106
6.3.5.	Intersección de una recta con un plano paralelo al horizontal.....	108
6.3.6.	Intersección de una recta con un plano paralelo al vertical.....	109
6.3.7.	Intersección de una recta con un plano perpendicular al primer bisector.....	110
6.3.8.	Intersección de una recta con un plano perpendicular al segundo bisector.....	111
<b>Tema 7</b>	<b>Paralelismo</b> _____	<b>113</b>
7.1.	Rectas paralelas.....	113
7.2.	Recta paralela a un plano.....	115

7.3.	Plano paralelo a una recta .....	116
7.4.	Planos paralelos.....	118
<b>Tema 8</b>	<b>Perpendicularidad</b> .....	<b>121</b>
8.1.	Perpendicularidad entre rectas .....	123
8.2.	Perpendicularidad entre recta y plano .....	123
8.2.1.	Recta perpendicular a un plano por un punto .....	124
8.2.2.	Plano perpendicular a una recta por un punto .....	125
8.3.	Perpendicularidad entre planos .....	126
8.3.1.	Planos perpendiculares a otro por un punto .....	127
8.3.2.	Plano perpendicular a otros dos por un punto .....	128
<b>Tema 9</b>	<b>Verdaderas magnitudes (distancias)</b> .....	<b>129</b>
9.1.	Distancia entre dos puntos .....	129
9.2.	Distancia de un punto a un plano .....	132
9.3.	Distancia de un punto a una recta .....	134
9.4.	Distancia entre dos rectas paralelas .....	136
9.5.	Distancia entre dos planos paralelos .....	138
9.6.	Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan .....	140
<b>Índice de Figuras</b>	.....	<b>143</b>



# Tema 1

## Introducción

Este libro pretende servir de guía de autoaprendizaje y apoyo a clases de nivel universitario para todos aquellos alumnos que busquen el conocimiento del sistema de representación diédrico.

Cada tema se aborda desde un aspecto teórico para pasar a la resolución práctica caso a caso.

Se recomienda al alumno que lea el libro en orden sin saltarse ningún tema, aunque aquél le parezca trivial, con materiales de dibujo para practicar cada ejemplo.

Del mismo modo también se recomienda al alumno que no utilice el libro a modo de vademécum sino que, según el nivel de confianza que presente en el momento de la lectura, solucione los problemas planteados incluso antes de ver la solución expuesta en el libro.

La respuesta de un alumno frente a un ejercicio de examen será más ágil si primero domina y comprende la resolución de ejercicios simples para combinarnos entre sí de una manera mecánica y natural. *Para poder correr hay que aprender primero a andar.*

El convenio de notación utilizado es el empleo de subíndices numéricos ( $A_1$ ) en lugar del tradicional uso de comillas ( $A'$ ) con el objetivo de facilitar a los alumnos su representación y evitar que una línea residual del dibujo (sobre todo las de trazos) pueda interferir con el nombre de un elemento involuntariamente. Además se ha decidido voluntariamente alterar la nomenclatura comúnmente utilizada de  $A_1$  para las proyecciones horizontales,  $A_2$  para las verticales y  $A_3$  para las del plano de perfil, de modo que  $A_1$  se aplica a las verticales,  $A_2$  a las horizontales y  $A_3$  a las del plano de perfil. ¿Por qué? Porque espero del alumno una reflexión profunda del temario aquí tratado y qué mejor que empezar poniendo en tela de juicio una nomenclatura estándar, un artificio, un elemento irreal.



## *Introducción*

En el ***Sistema cilíndrico o paralelo*** el centro de proyección es un punto impropio ( $\mathbf{O}_{\infty}$ ) y las proyecciones pueden ser ortogonales u oblicuas.

En este grupo se hallan las *proyecciones acotadas* (utilizadas para representaciones topográficas); el *sistema diédrico* o *Monge* (planos de obra, de máquina, aeronáuticos) y las proyecciones axonométricas.

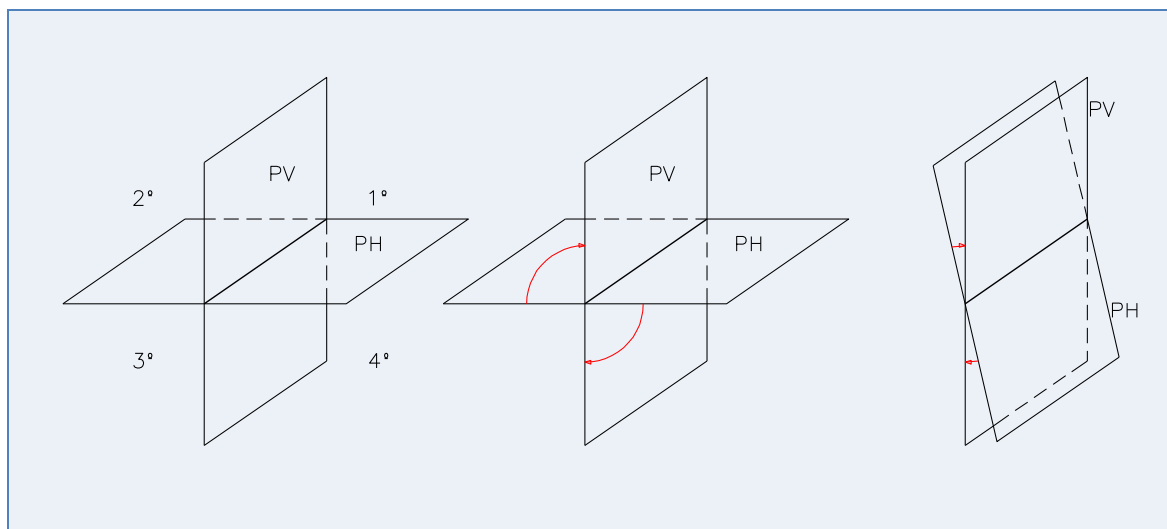
# Tema 2

## Sistema diédrico o Monge

Este sistema consta de dos planos perpendiculares entre sí: uno *horizontal*, **PH**, y otro *vertical*, **PV**, siendo su intersección *la línea de tierra*, **LT**. Dividen al espacio en cuatro sub-espacios llamados *cuadrantes* o *diedros* (ángulo entre dos planos), de ahí proviene su nombre (diédrico) y en reconocimiento a Gaspar Monge, que fue su inventor.

Los objetos ubicados en el espacio se proyectan en forma perpendicular sobre cada plano de proyección (proyección cilíndrica ortogonal) por lo tanto cada objeto tiene dos proyecciones o dos imágenes.

Para representar los objetos del espacio (tres dimensiones) en el plano (dos dimensiones) se abate el plano horizontal **PH** haciéndolo coincidir con el vertical **PV** utilizando la línea de tierra **LT** como eje o pivote.



**Figura 1. Abatimiento de planos de proyección**



# Tema 3

## El punto

### 3.1. Representación

Un punto en el espacio se representa mediante su proyección ortogonal tanto sobre el plano horizontal **PH**, obteniéndose **A<sub>1</sub>**, como sobre el plano vertical **PV**, obteniéndose **A<sub>2</sub>**.

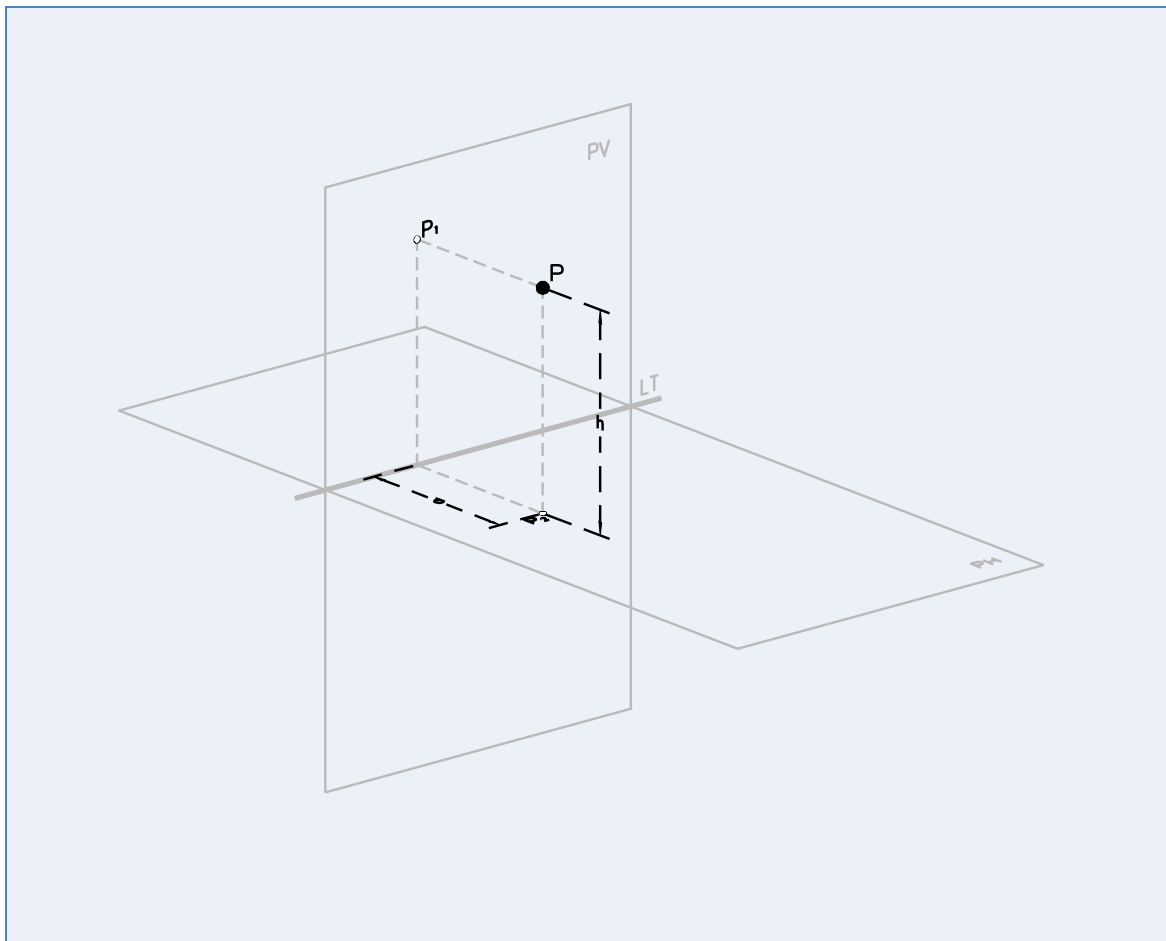


Figura 2. Representación 3D del punto

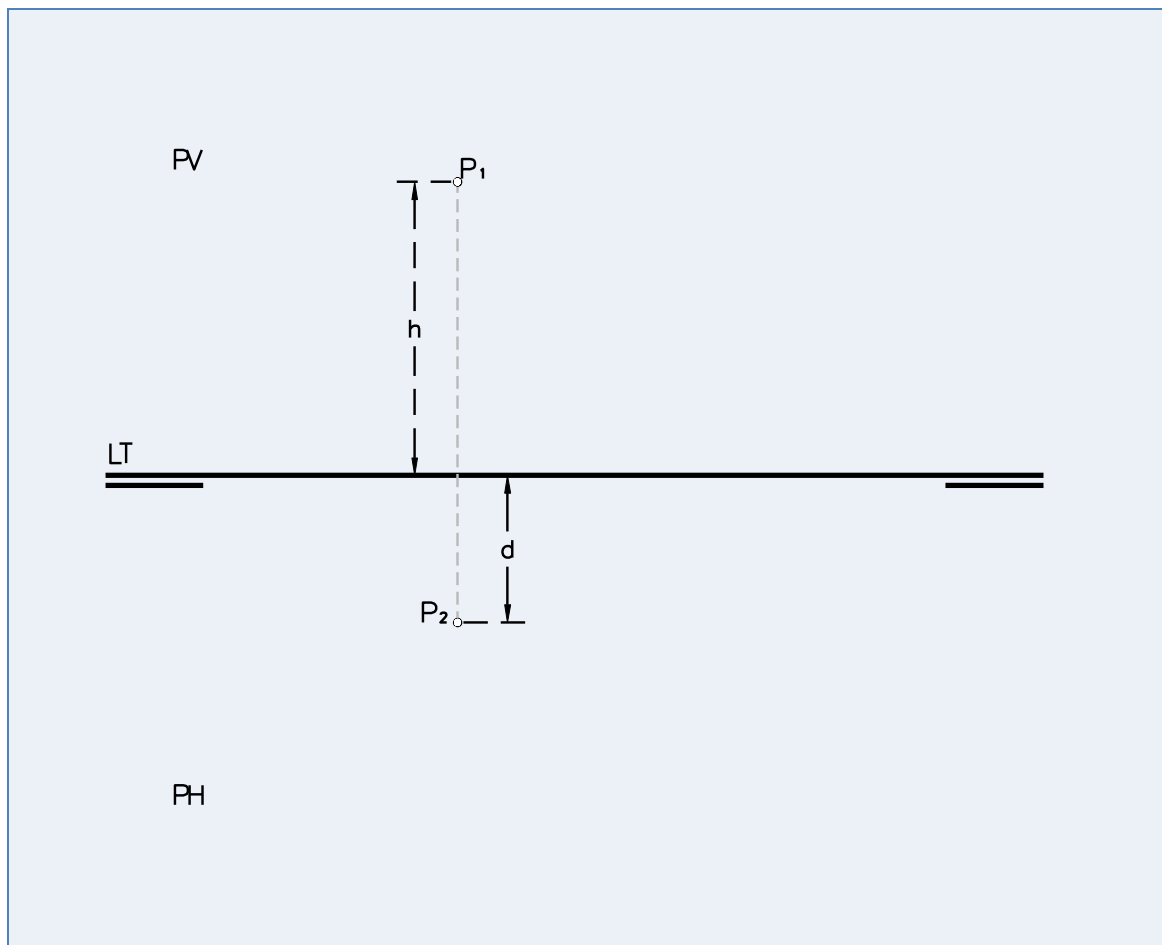


Figura 3. Representación del punto

Un punto sólo está bien representado cuando las proyecciones  $A_1$  y  $A_2$  se ubican sobre una misma línea siendo ésta perpendicular a **LT**.

Todas las referencias a puntos se harán mediante una letra en mayúsculas.

### 3.2. Posiciones

Las distintas zonas en las que se puede posicionar un punto se denomina el Alfabeto del punto. Así pues un punto puede posicionarse respecto de los planos horizontal y vertical de proyección de 17 formas. En la figura siguiente se muestran estas posiciones representadas circularmente sobre un plano perpendicular a la **LT** (también denominado plano de perfil, como veremos más adelante).

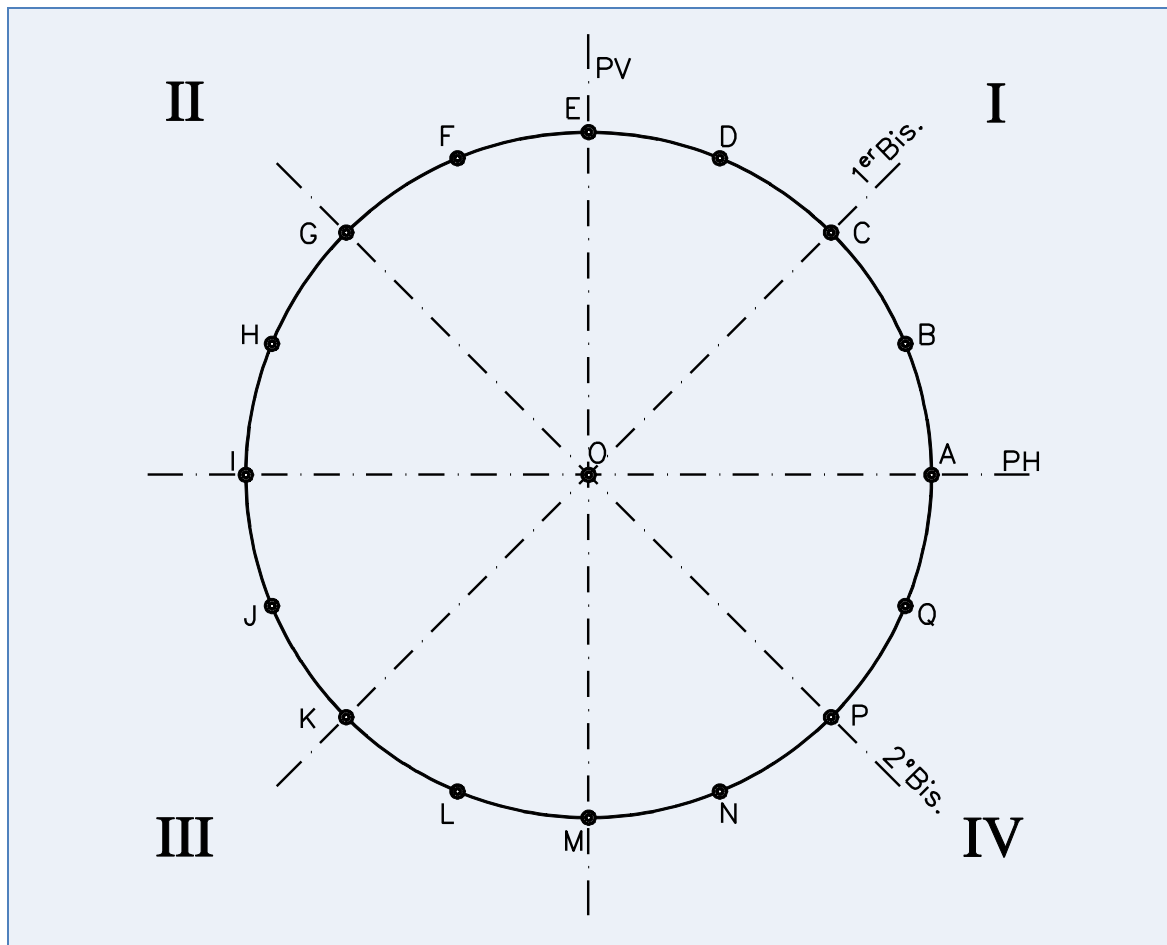


Figura 4. Alfabeto del punto 3D

La representación de estos puntos en el sistema diédrico es la expuesta en la Figura 5.

Sin embargo, en la Figura 11, se representa de una manera más correcta puesto que todos los puntos se encuentran en un mismo plano perpendicular a **LT**.

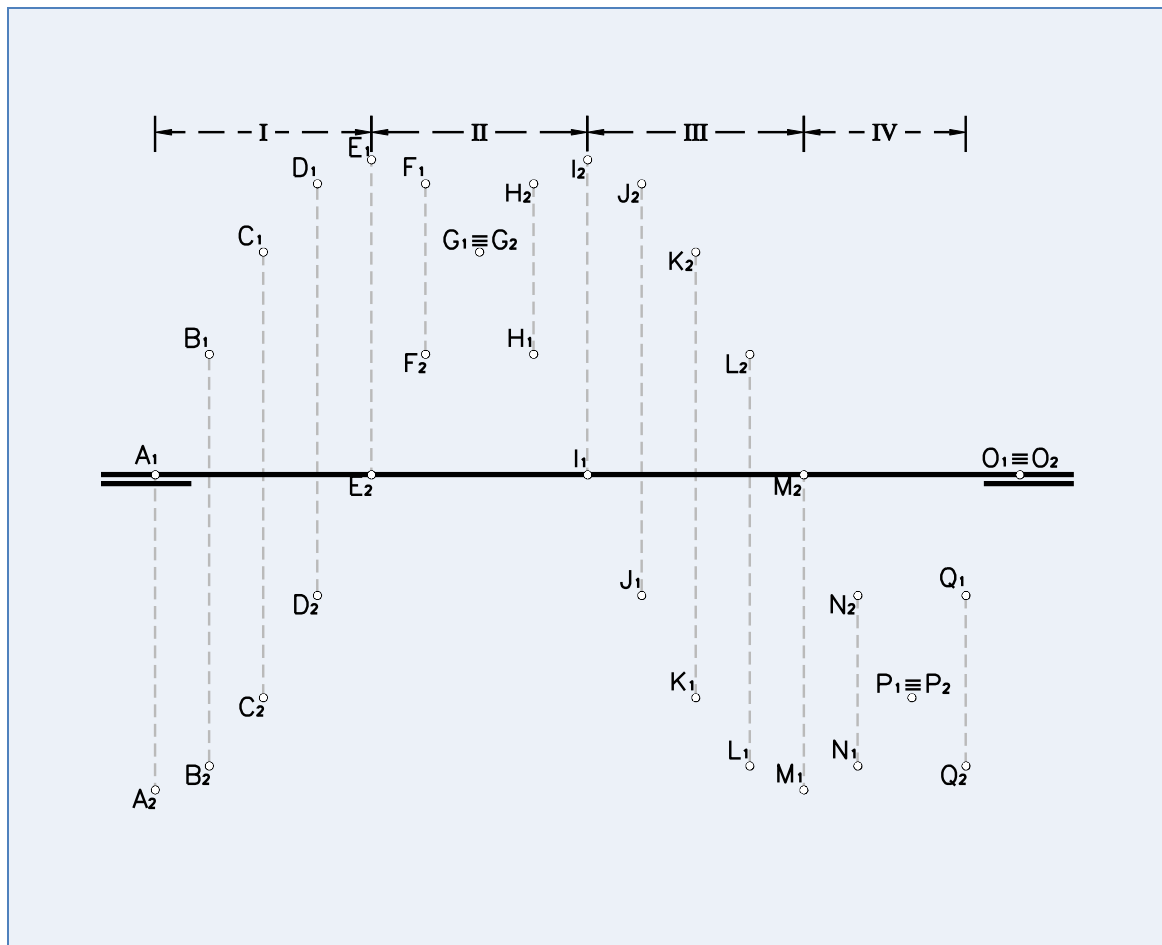


Figura 5. Alfabeto del punto

### 3.3. Cota, alejamiento y desviación

Para identificar la posición de un punto en el espacio se deben definir sus tres dimensiones. Así pues un punto queda determinado por la **cota**, el **alejamiento** y la **desviación**.

La **cota** es la distancia o altura del punto **A** al plano horizontal **PH** y en el sistema diédrico o Monge está representada por la medida desde **A<sub>2</sub>** a la línea de tierra **LT**.

El **alejamiento** es la distancia del punto **A** al plano vertical **PV** y es la medida desde **A<sub>1</sub>** a la línea de tierra **LT**.

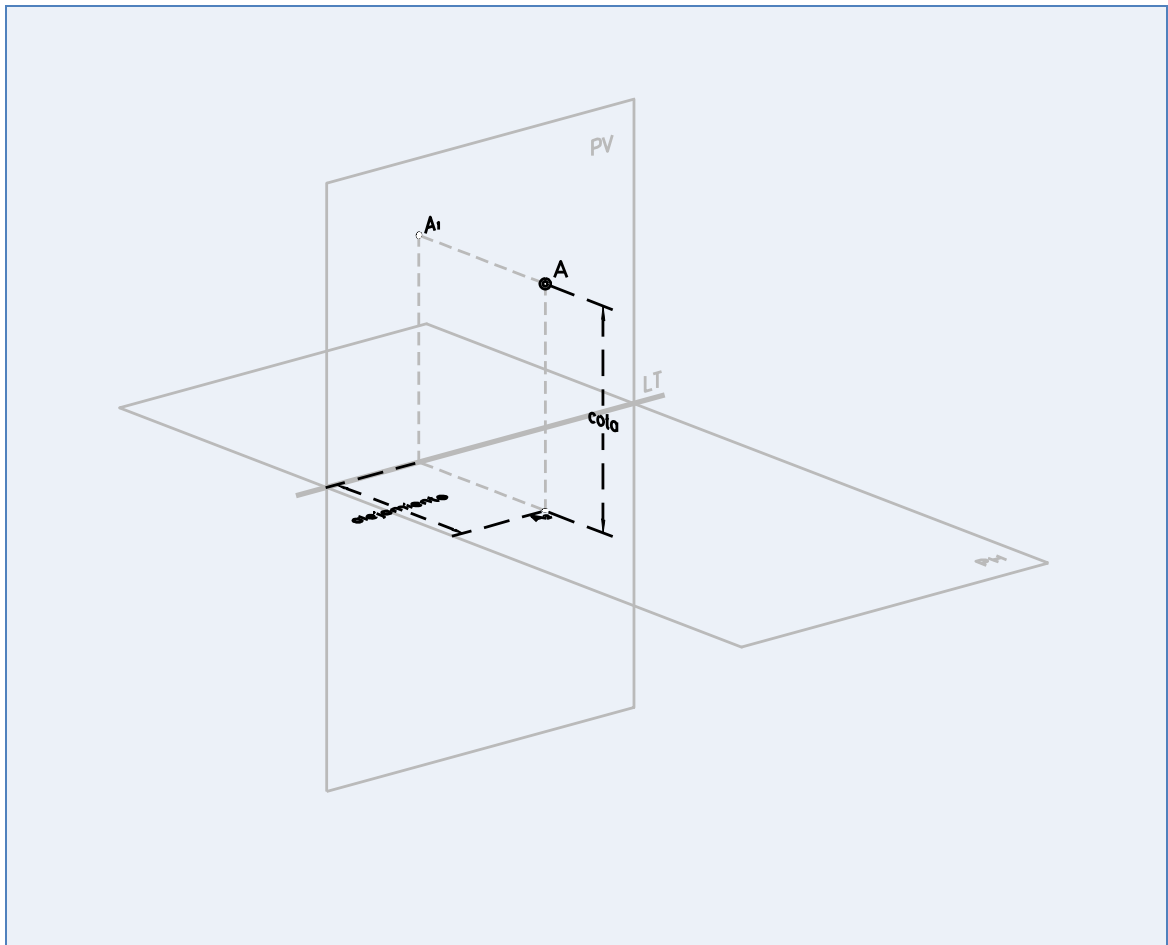


Figura 6. Cota y alejamiento 3D



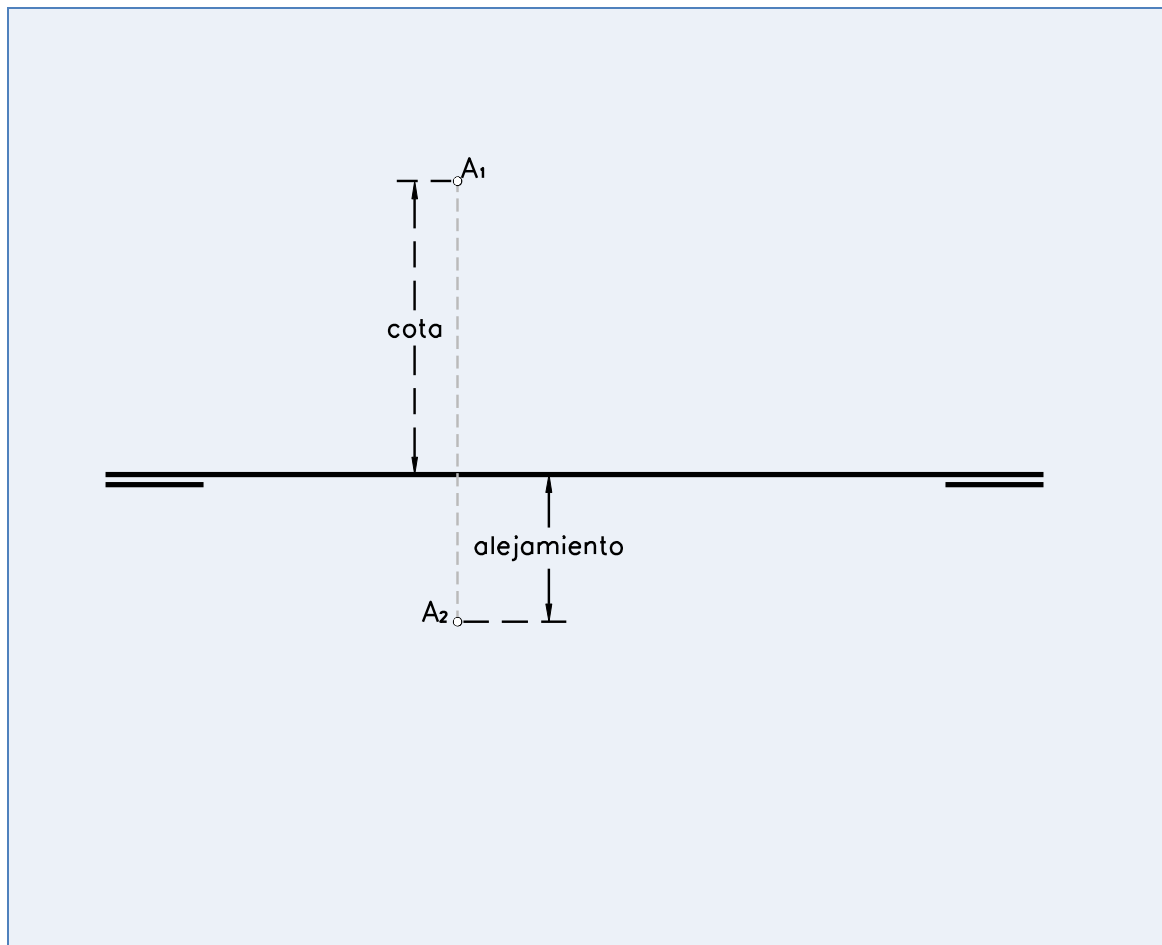


Figura 7. Cota y alejamiento

Si un punto se encuentra en el primer diedro o cuadrante, por ejemplo el punto **A**, tiene *cota positiva* porque está encima del plano horizontal, **A<sub>2</sub> sobre LT**, y *alejamiento positivo* porque está delante del plano vertical, **A<sub>1</sub> debajo de LT**.

El observador siempre se encuentra en el primer cuadrante, por lo tanto todos los objetos que se hallen en los restantes cuadrantes se representan con línea discontinua

En el segundo cuadrante el punto **B** tiene cota positiva, **B<sub>2</sub> sobre LT**, y el alejamiento es negativo, **B<sub>1</sub> sobre LT**, porque se encuentra detrás del plano vertical **PV**

En el tercer cuadrante el punto **C** tiene cota negativa, **C<sub>2</sub> debajo de LT**, y alejamiento negativo, **C<sub>1</sub> sobre LT**, porque se halla detrás del plano vertical **PV**.

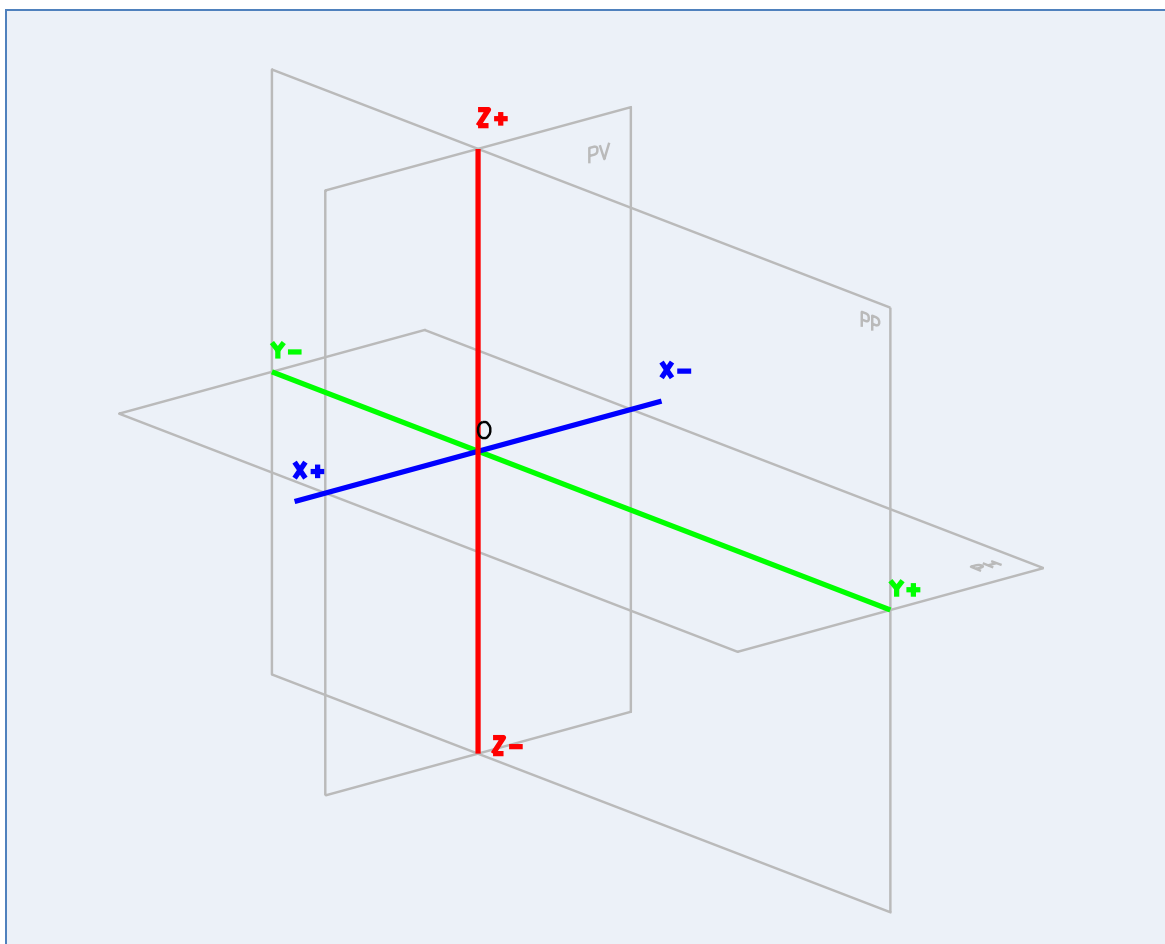
Por último el punto **D** del cuarto cuadrante tiene cota negativa, **D<sub>2</sub> debajo de LT**, y alejamiento positivo, **D<sub>1</sub> debajo de LT**, porque se halla delante del plano vertical **PV**.

Resumiendo:

- A cota +, alejamiento +
- B cota +, alejamiento –
- C cota - , alejamiento –
- D cota - , alejamiento +

Todo punto en el espacio se define por tres dimensiones o coordenadas, de momento conocemos dos: **cota** y **alejamiento**.

La tercera dimensión es la **desviación**, que es la distancia del punto hasta un plano perpendicular a **LT**, o plano de perfil, **PP**. La intersección de este plano de perfil **PP** de referencia con la línea de tierra **LT** se denomina origen **O**.



**Figura 8. Vista 3D de los planos proyectantes**

Llegados a este punto podremos definir la posición de un punto mediante sus tres coordenadas (X, Y, Z) -> (desviación, cota, alejamiento).

Como ejemplo el punto definido por A (30, 10, 50) en mm sería representado como se muestra en la Figura 9 y en la Figura 10.

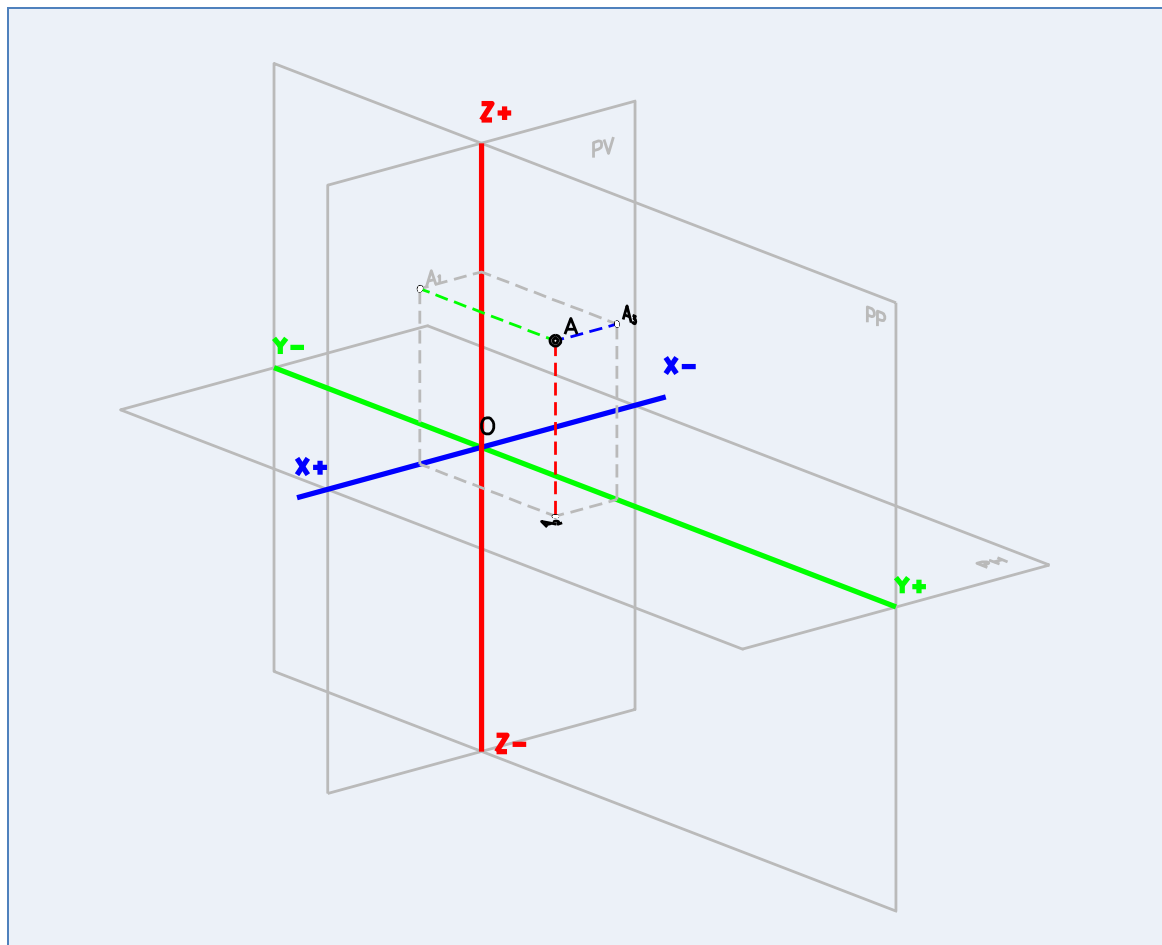
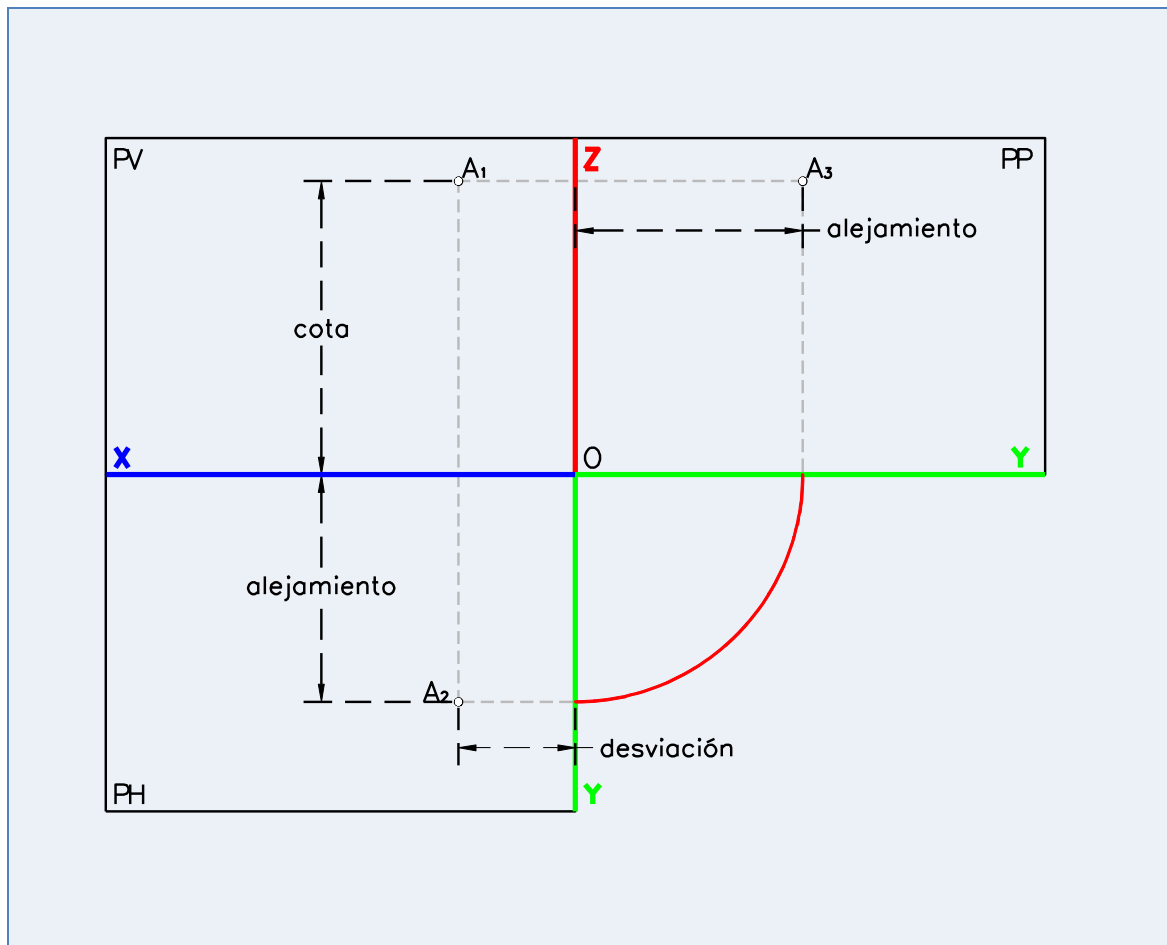
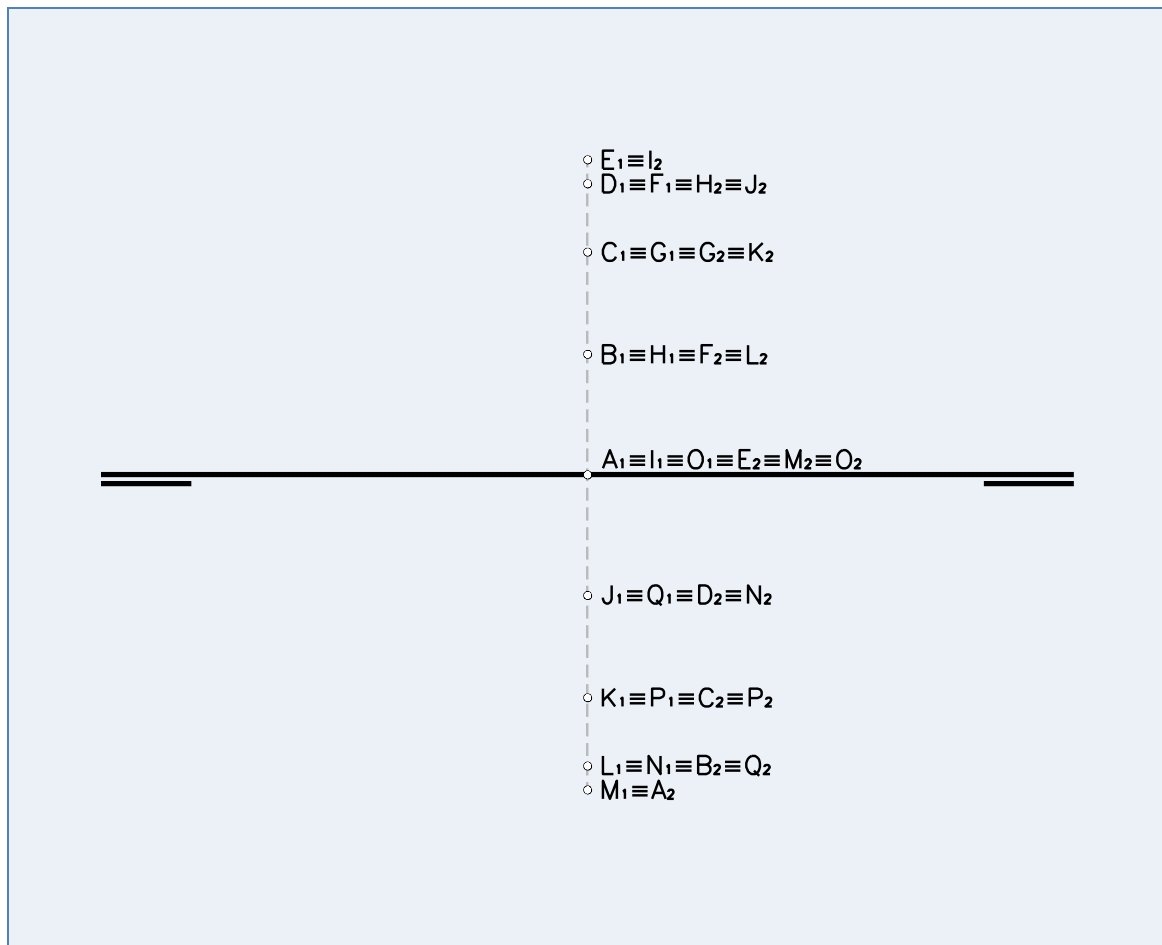


Figura 9. Representación 3D de un punto dado



**Figura 10. Representación de un punto dado**

Llegados a este punto vamos a corregir la representación que hicimos en la Figura 5 del alfabeto del punto ya que considerando que todos los puntos se encontraban dentro de un mismo plano de perfil tendrían todos ellos un valor de desviación común, y por tanto su verdadera representación sería la de la figura siguiente. Compréndase que la mencionada figura inicial buscaba representar con fines didácticos de la manera más clara los puntos.



**Figura 11. Alfabeto de los puntos representación real**

# Tema 4

## La recta

### 4.1. Representación

Una recta se define mediante al menos dos puntos. Como ya sabemos representar puntos será fácil hacerlo con la recta.

Todas las referencias a rectas se harán mediante una letra en minúsculas.

La recta  $r$  está determinada por los puntos  $A$  y  $B$  siendo sus proyecciones respectivas  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_1$ ,  $B_2$ . Para hallar las proyecciones de la recta  $r$ , bastará con unir las proyecciones homónimas  $A_1$  con  $B_1$ , obteniendo  $r_1$  (proyección vertical), y  $A_2$  con  $B_2$ , obteniendo así  $r_2$  (proyección horizontal).

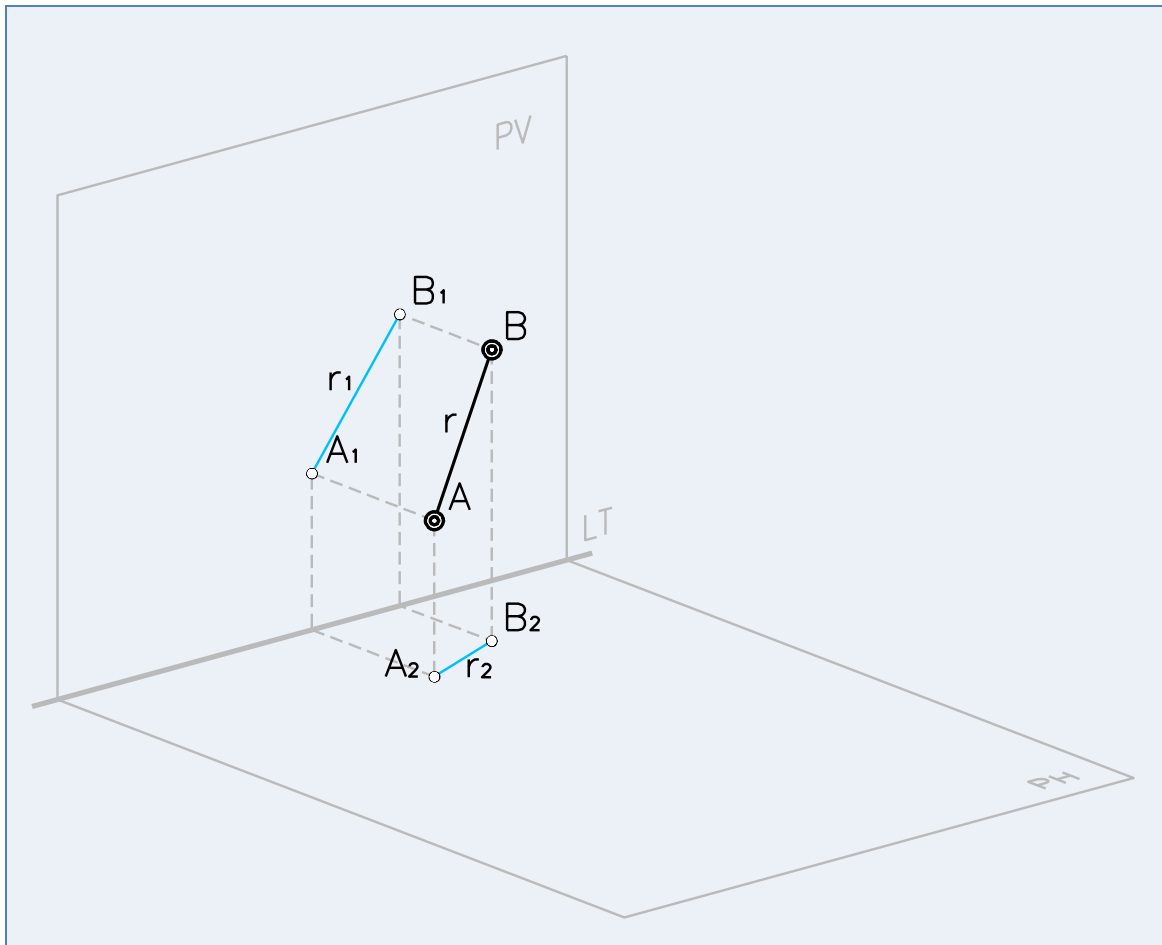
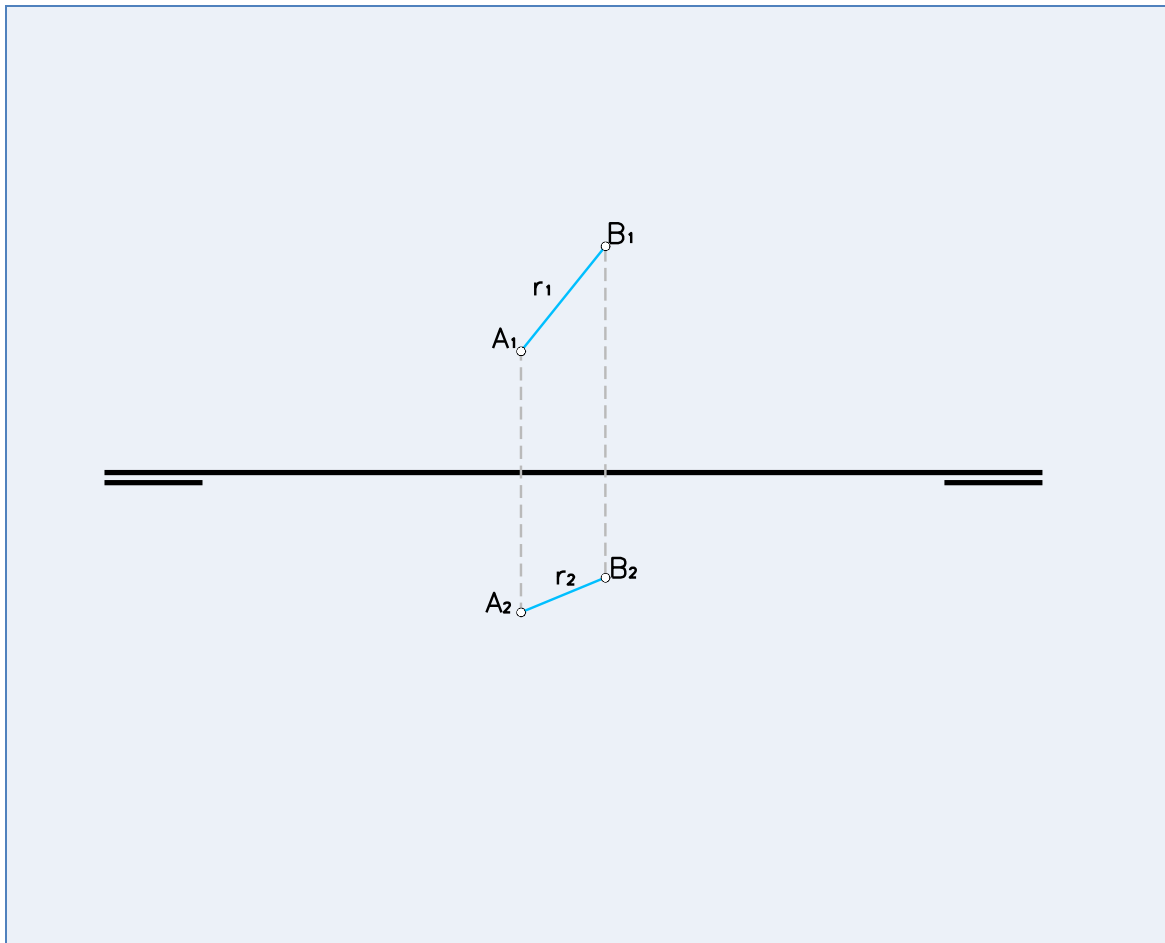


Figura 12. Representación 3D de la recta



**Figura 13. Representación de la recta**

Las rectas se representan con línea continua sólo si se encuentra en el primer cuadrante, cuando pasan a otro, ya sea por la traza horizontal **H** o por la traza vertical **V** se dibujan con línea discontinua.

En la proyección de la recta vertical  $r_1$  hallaremos todas las proyecciones verticales de los puntos que contiene la recta:  $A_1$ ,  $B_1$ , etc. Lógicamente la proyección horizontal de la recta  $r_2$  contendrá las proyecciones horizontales de los puntos:  $A_2$ ,  $B_2$ , etc.

Un punto sólo pertenece a una recta si sus dos proyecciones  $A_1$  y  $A_2$  están contenidas dentro de las proyecciones correspondientes de la recta  $r_1$  y  $r_2$ .

## 4.2. Puntos notables de la recta

Prolongando la recta  $r$  hasta cortar los planos horizontal **PH** y vertical **PV**, se obtienen los puntos **H** (sobre el plano vertical, al prolongar  $r_2$ ) y **V** (sobre el plano horizontal, al prolongar  $r_1$ ) denominados **trazas de la recta**.



De este modo comprobamos cómo la proyección horizontal de la recta  $r_2$  al cortar con el plano vertical (en la línea de tierra **LT**) se obtiene  $V_1$  y cómo la proyección vertical de la recta  $r_1$  al cortar con **LT** identifica  $H_2$ . Para hallar  $V_2$  y  $H_1$  basta con buscar la proyección correspondiente de estos puntos dentro de la recta con una perpendicular a **LT**.

Punto de la recta situado en el primer bisector (**D**): punto de la misma que tenga igual altura y alejamiento.

Punto de la recta situado en el segundo bisector (**C**): punto de la misma tal que coincidan sus proyecciones horizontal y vertical.

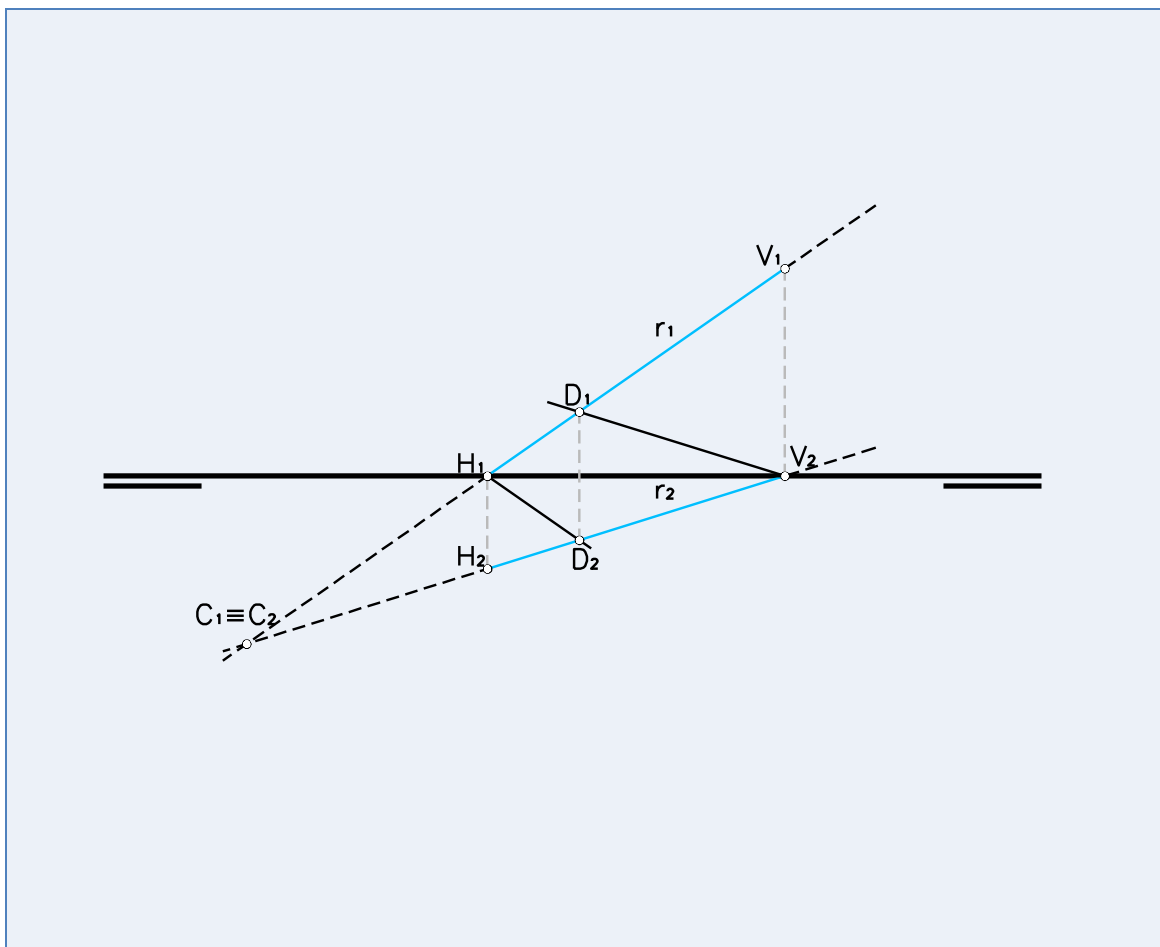
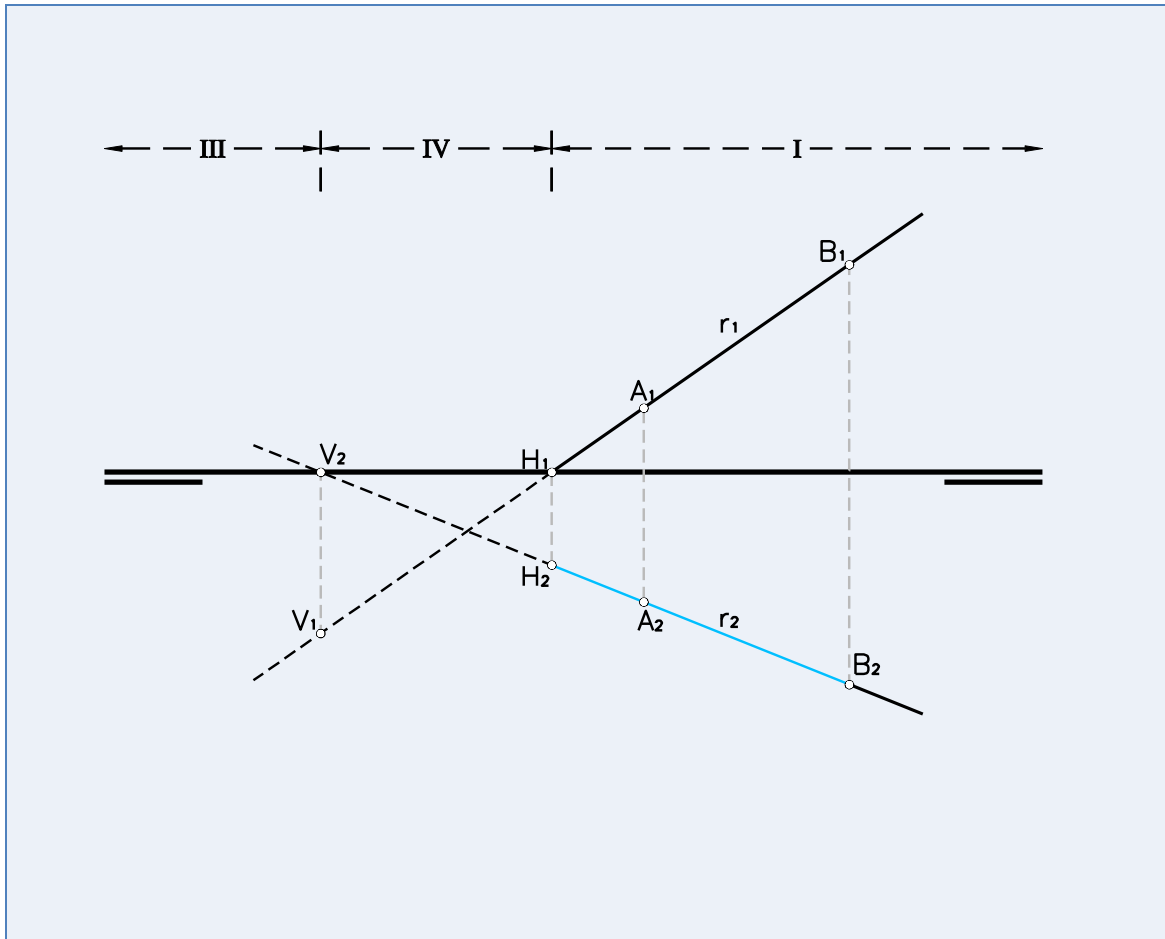


Figura 14. Puntos notables de la recta

Cada recta atraviesa tres cuadrantes a excepción de las rectas que cortan **LT**, que sólo atraviesan dos cuadrantes. Para saber por qué cuadrantes pasa una recta deben conocerse sus trazas.



**Figura 15. Cuadrantes por los que pasa una recta. Ejemplo 1**

Como actividad adicional el alumno deberá visualizar mentalmente la posición de la recta en una perspectiva 3D. Esto ayudará a comprender mejor y reforzar la visión espacial de una recta, y por ende, de cualquier otro elemento con el que nos encontremos en el futuro.

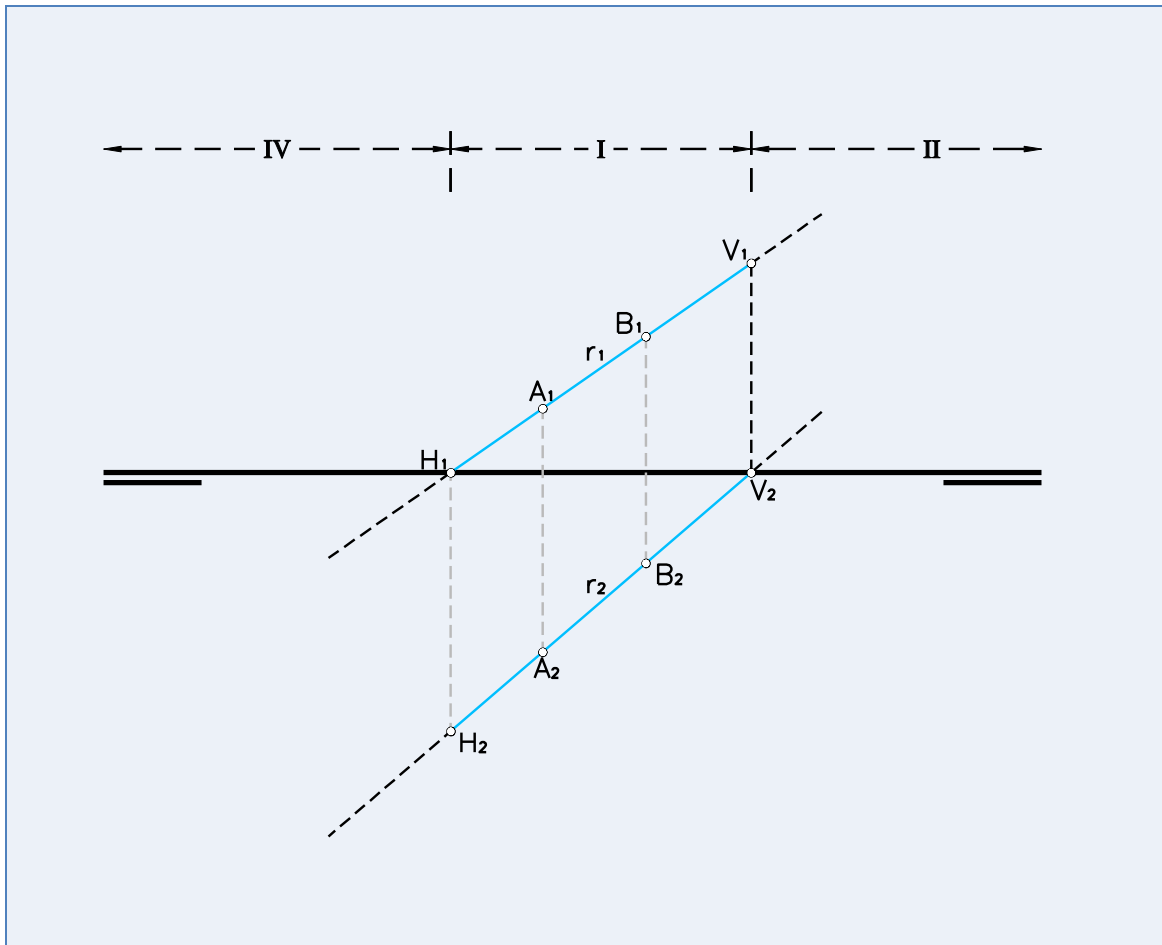


Figura 16. Cuadrantes por los que pasa una recta. Ejemplo 2

### 4.3. Posiciones de la recta

Las rectas pueden situarse algunas en posiciones respecto de los planos de proyección que las hacen características. Al conjunto de posibles posiciones de una recta se le llama alfabeto de la recta.

#### 4.3.1. Recta horizontal

Es paralela al plano horizontal, tiene traza con el plano vertical. En su representación diédrica  $h_2$  forma ángulo con **LT** y  $h_1$  es paralela a **LT**.

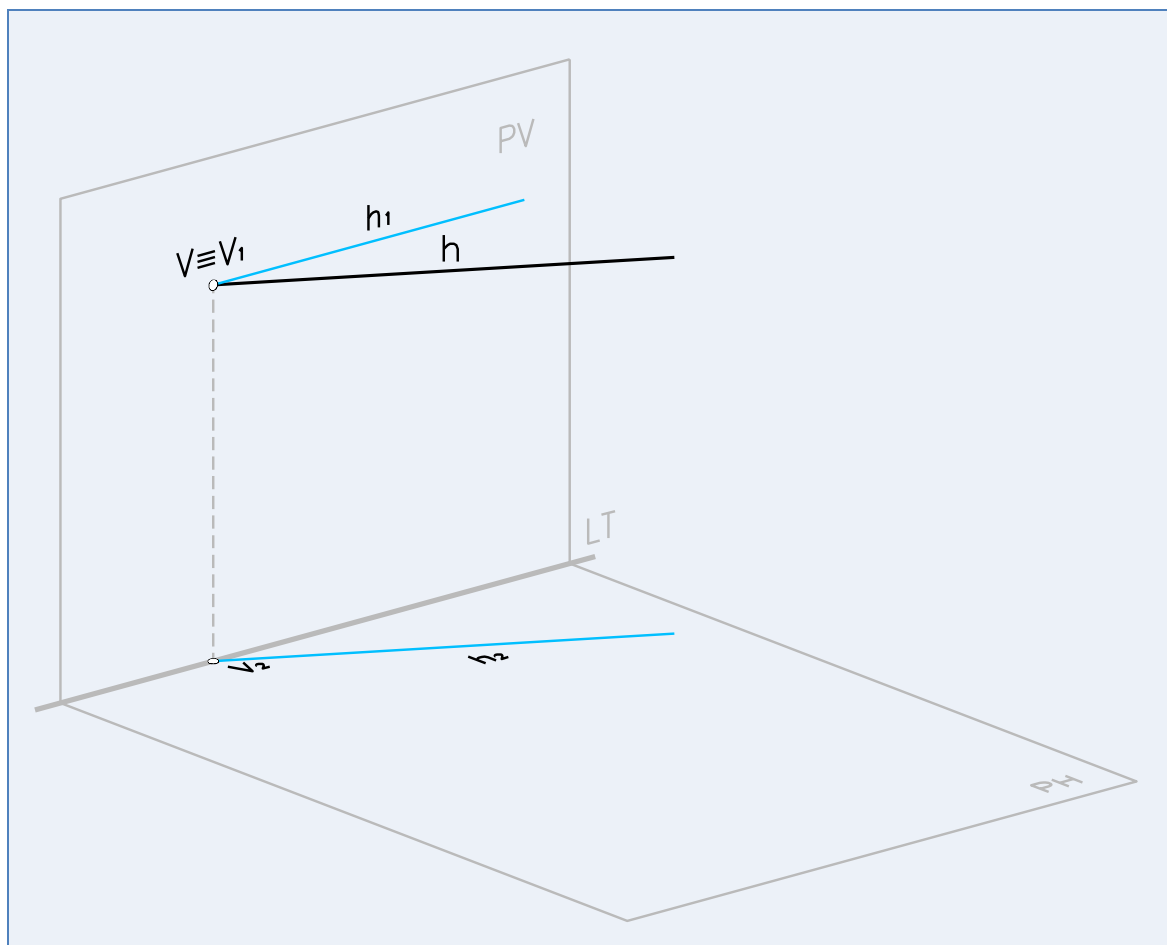
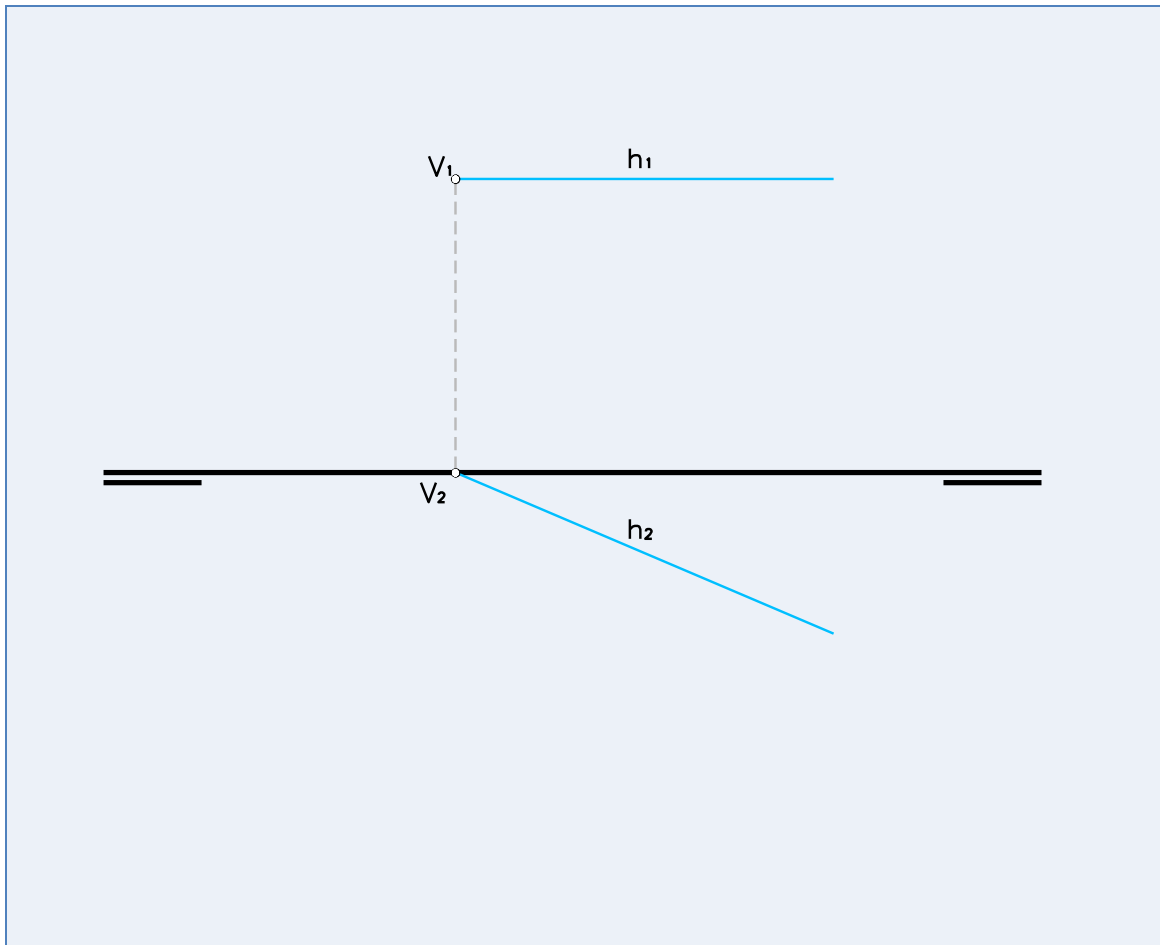
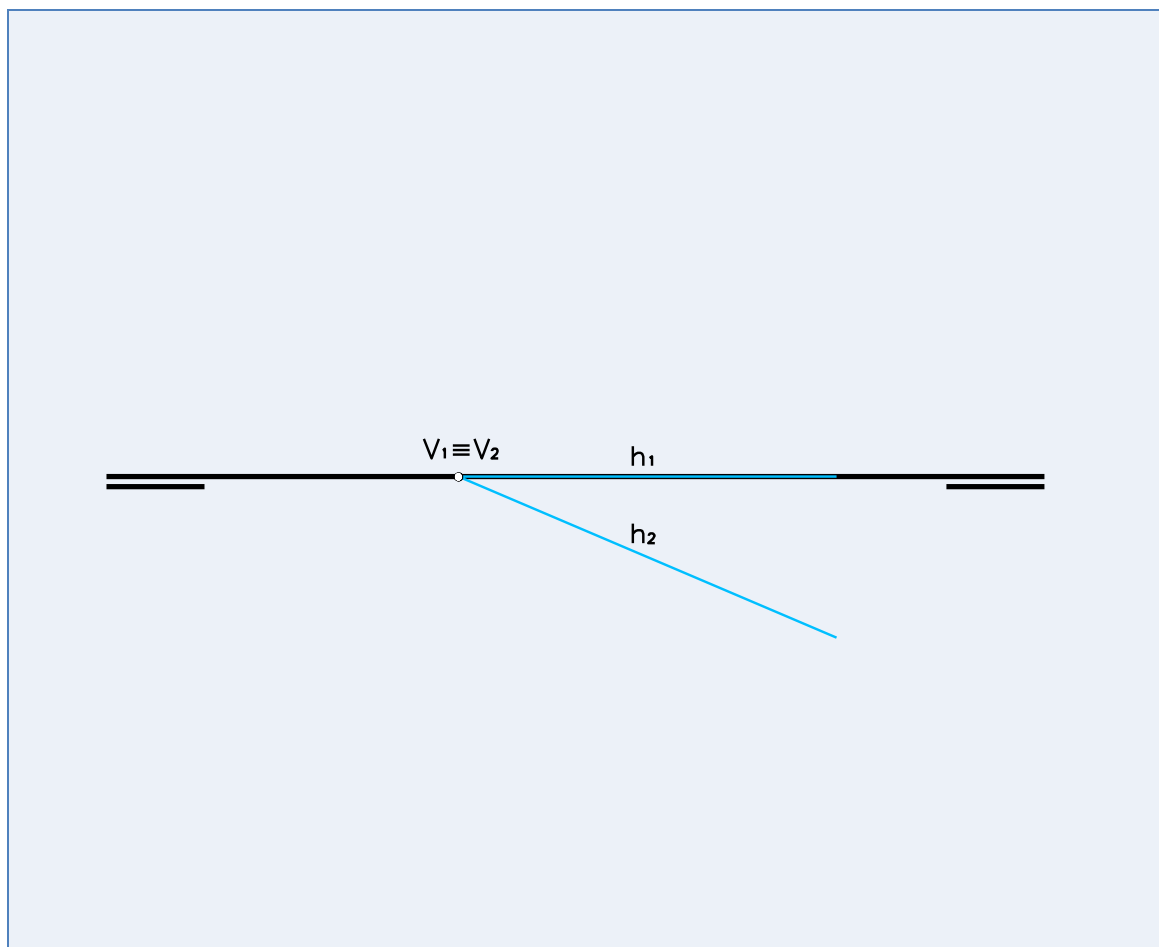


Figura 17. Recta horizontal 3D



**Figura 18. Recta horizontal**

Como variación de la anterior si la recta forma parte del plano horizontal de proyección **PH** su representación sería la siguiente.



**Figura 19. Recta horizontal en el plano horizontal**

La recta

#### 4.3.2. Recta frontal

Es paralela al plano vertical, tiene traza con el plano horizontal. En su representación diédrica  $f_1$  forma ángulo con **LT** y  $f_2$  es paralela a **LT**.

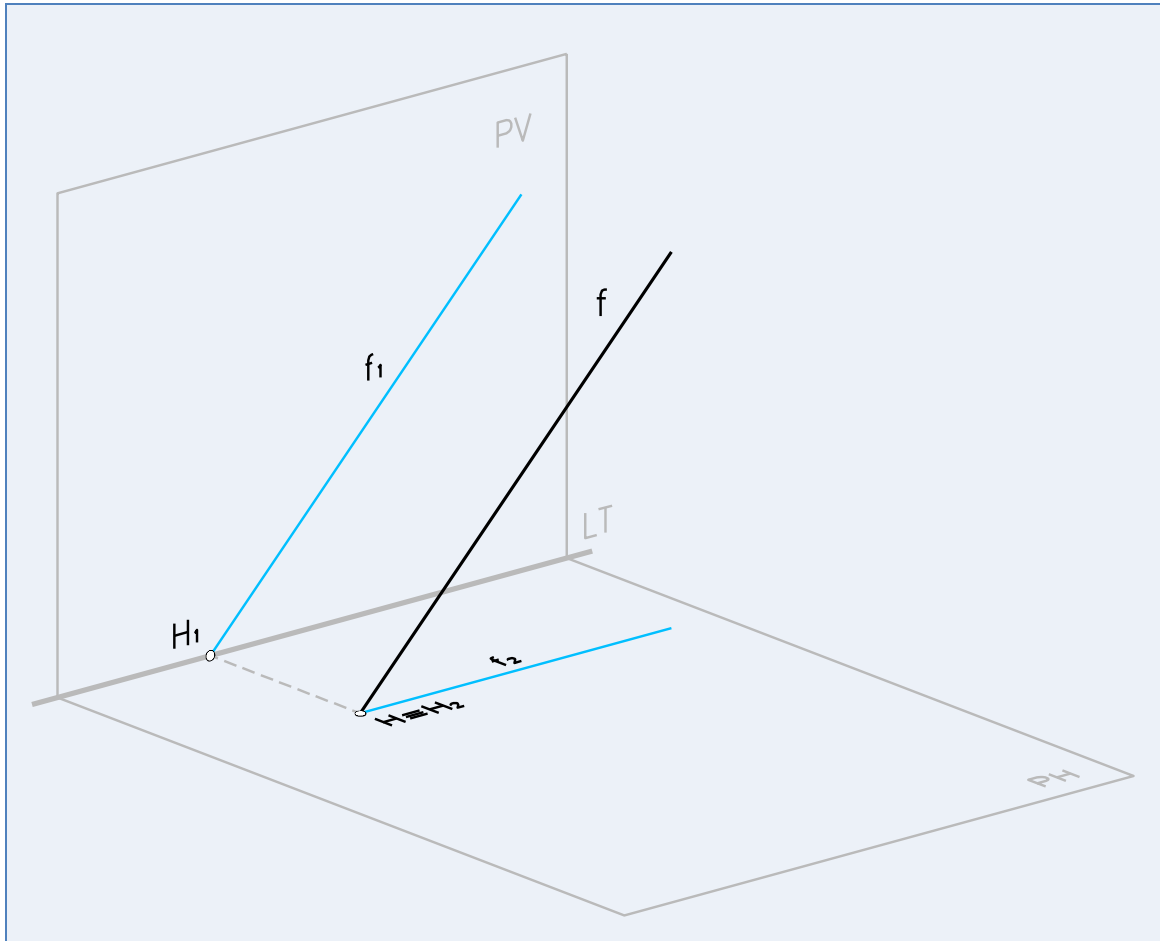
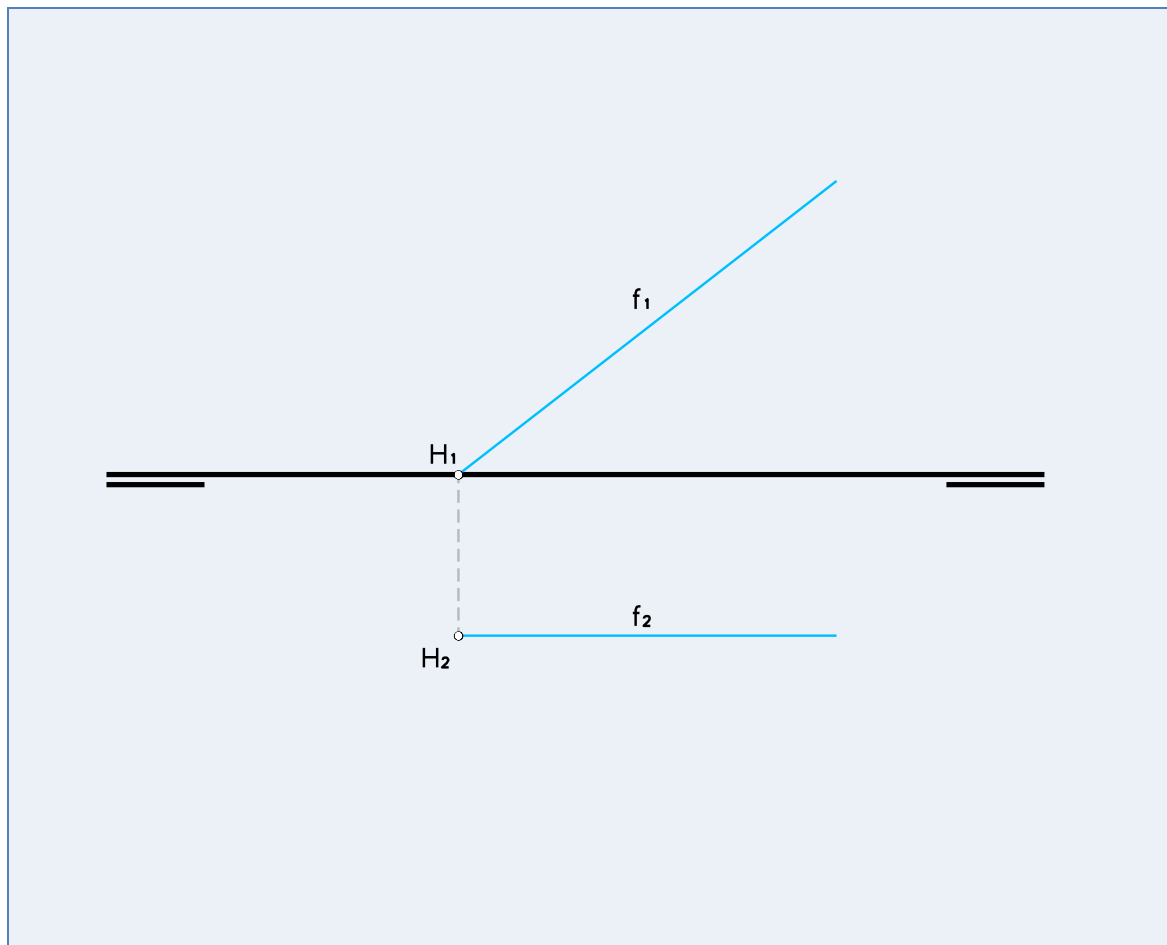


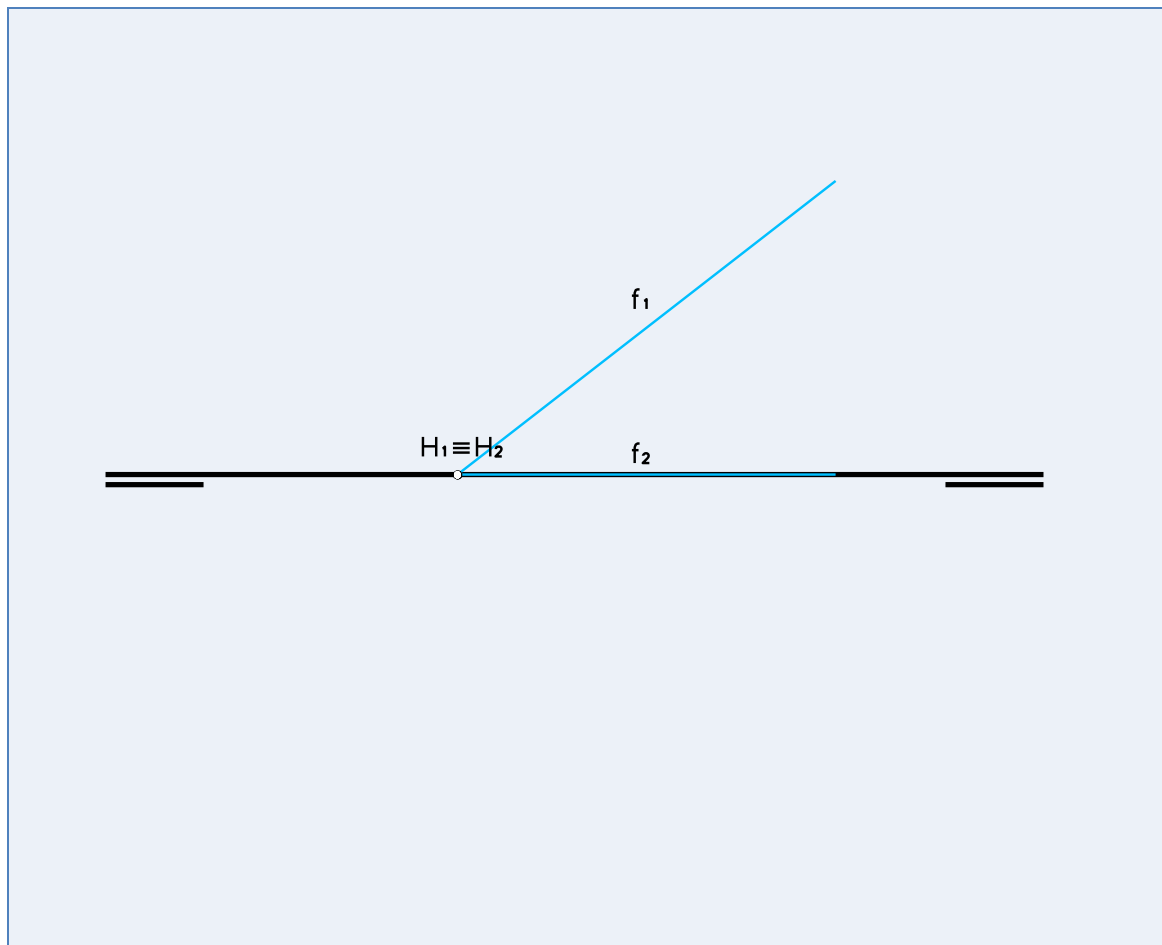
Figura 20. Recta frontal 3D



**Figura 21. Recta frontal**

Como variación de la anterior si la recta forma parte del plano vertical de proyección **PV** su representación sería la siguiente.





**Figura 22. Recta frontal en el plano vertical**

### 4.3.3. Recta paralela a la línea de tierra

Es paralela a **PH** y **PV**, por lo tanto sus proyecciones  $r_1$  y  $r_2$  son paralelas a **LT**. De esta recta no se pueden obtener las trazas **H** y **V** porque ésta no corta a **PH** o a **PV**.

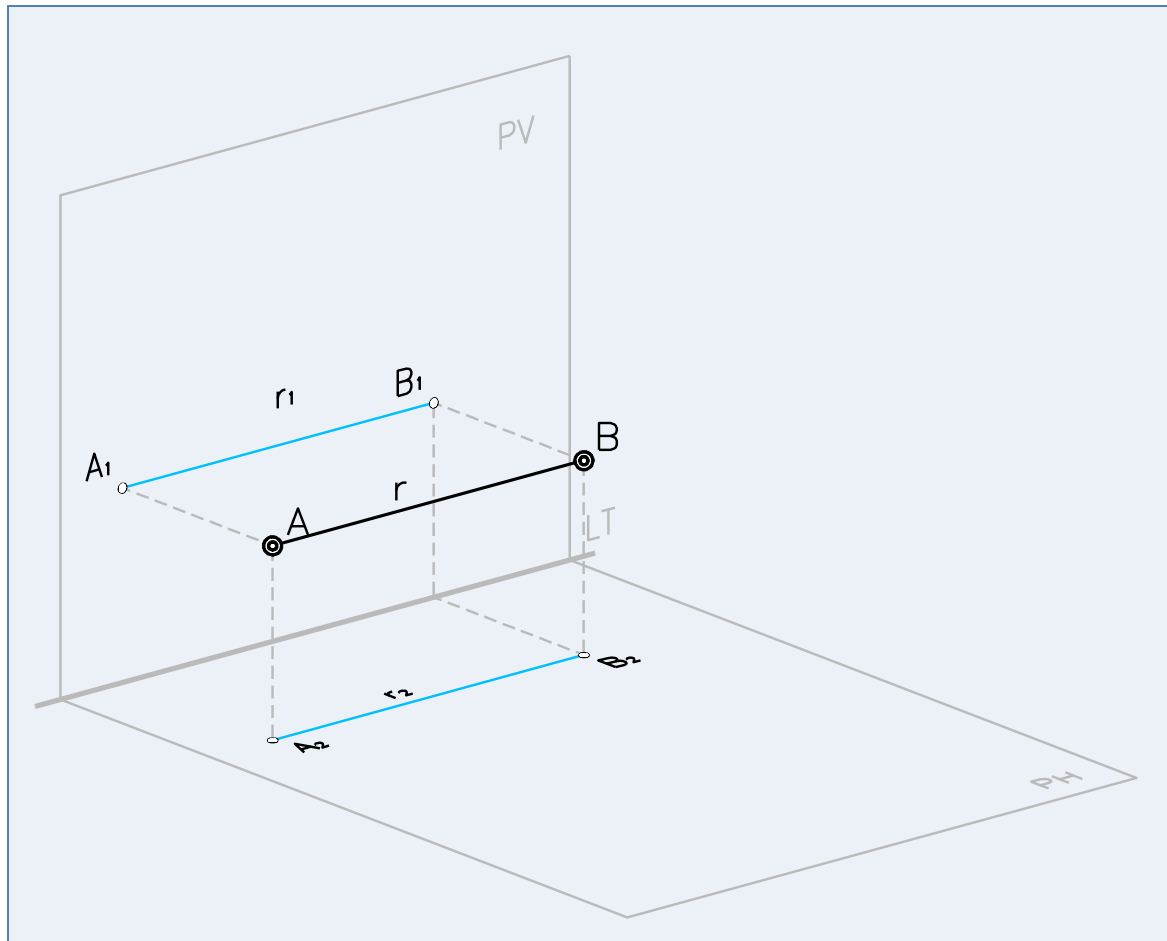
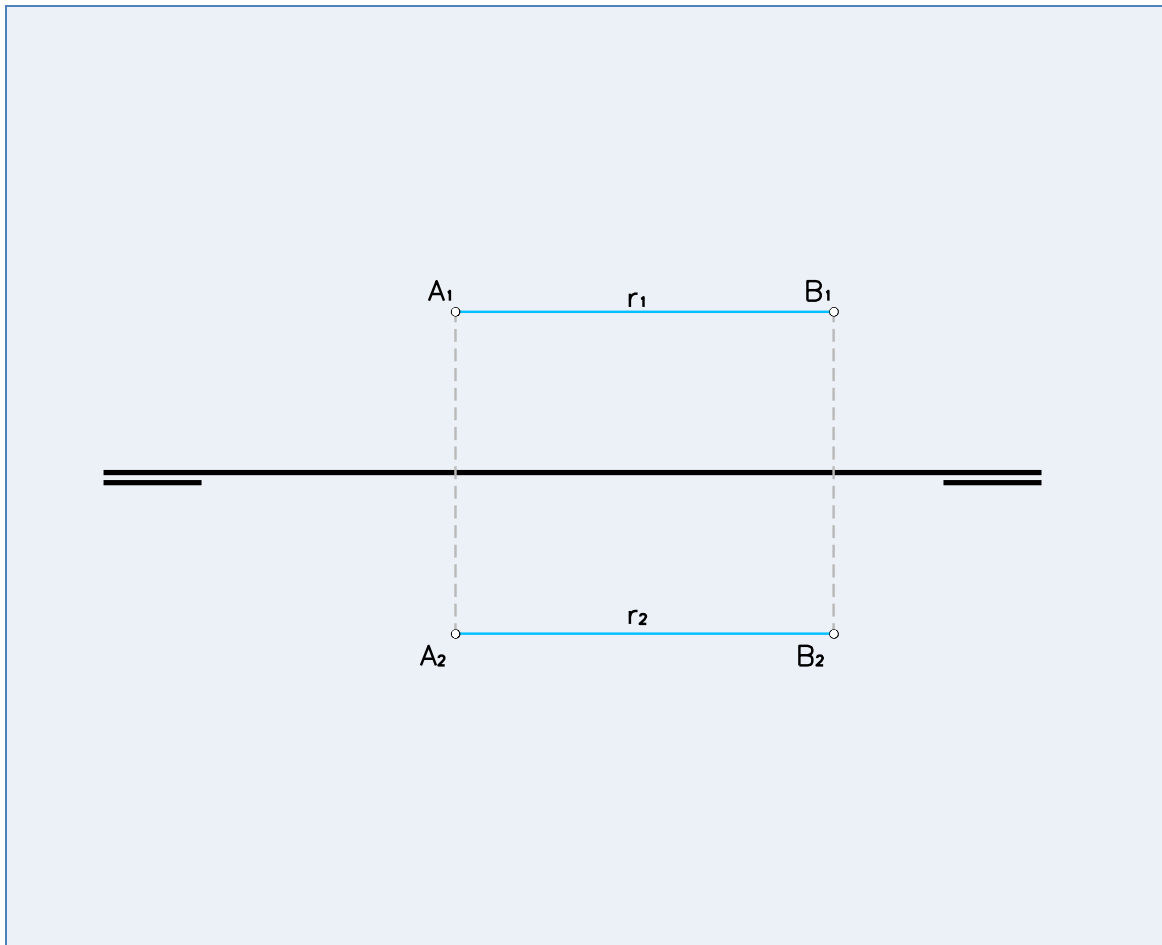


Figura 23. Recta paralela a la línea de tierra 3D



**Figura 24. Recta paralela a la línea de tierra**

4.3.4. Recta que corta a LT

Esta recta presenta H y V en un mismo punto de LT, punto en el que la corta.

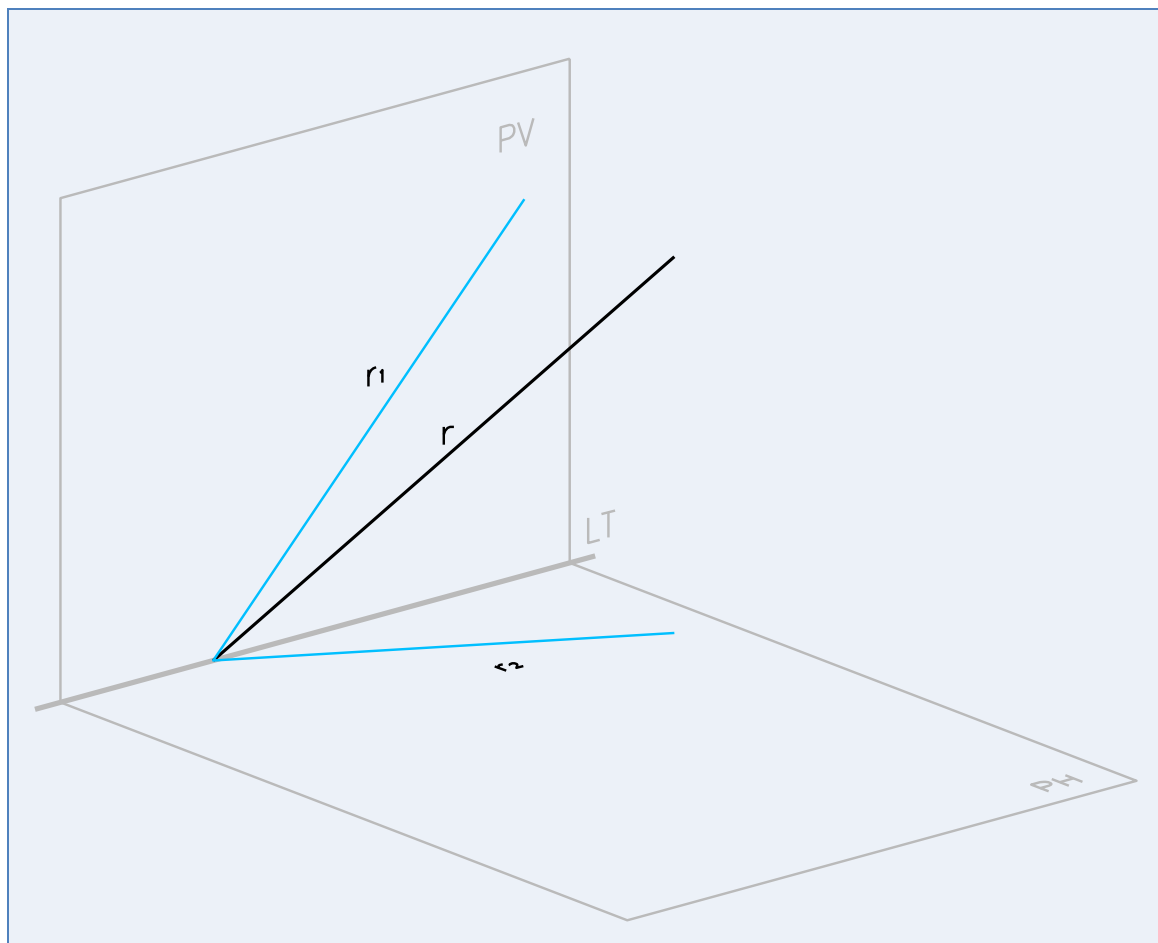
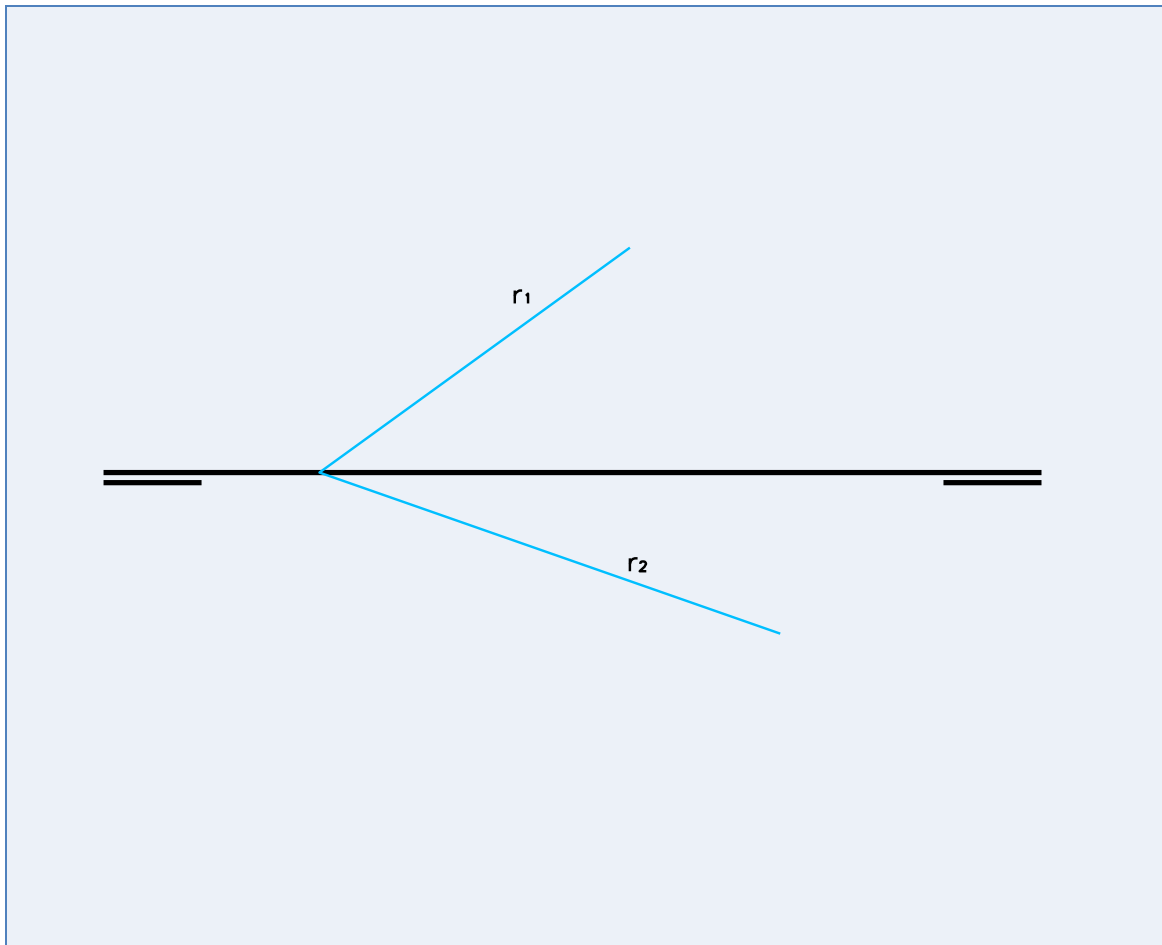
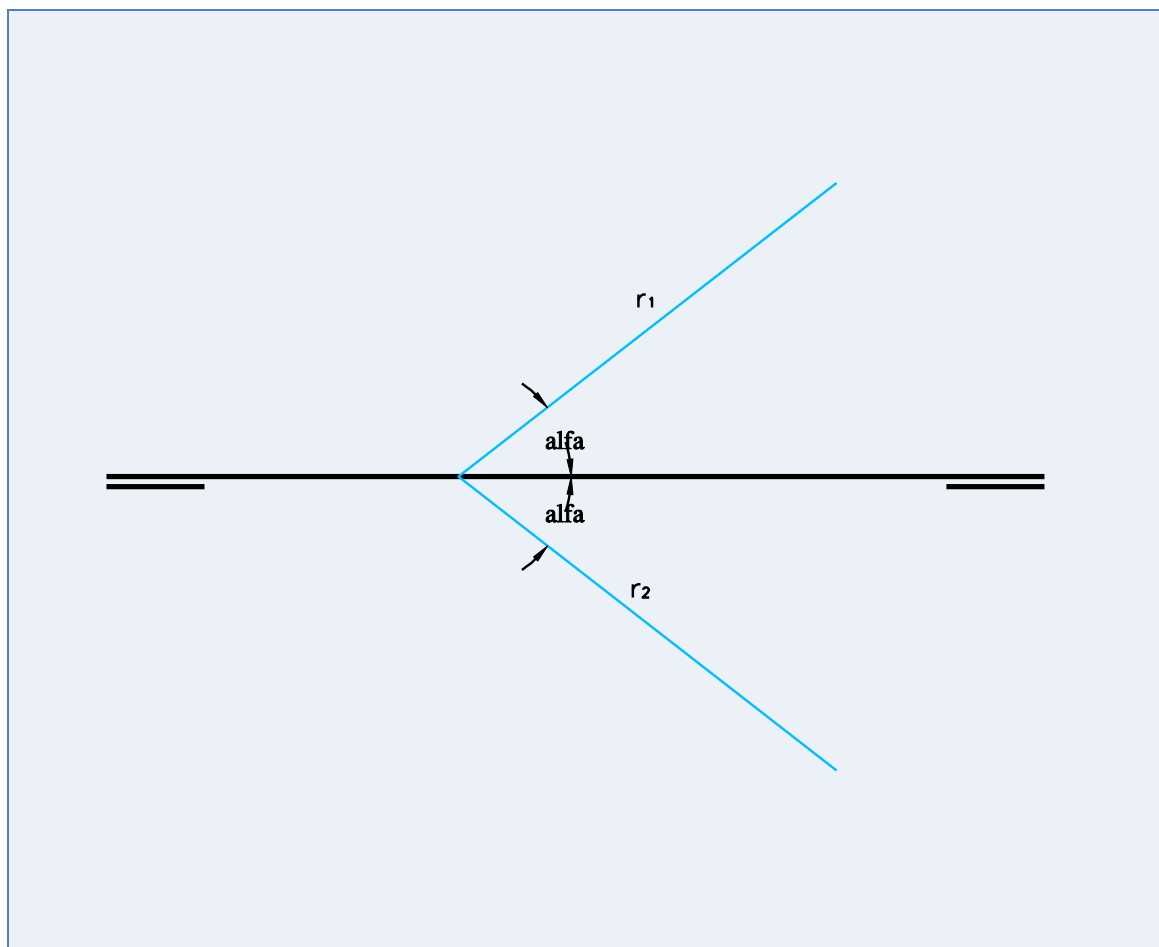


Figura 25. Recta que corta a LT 3D



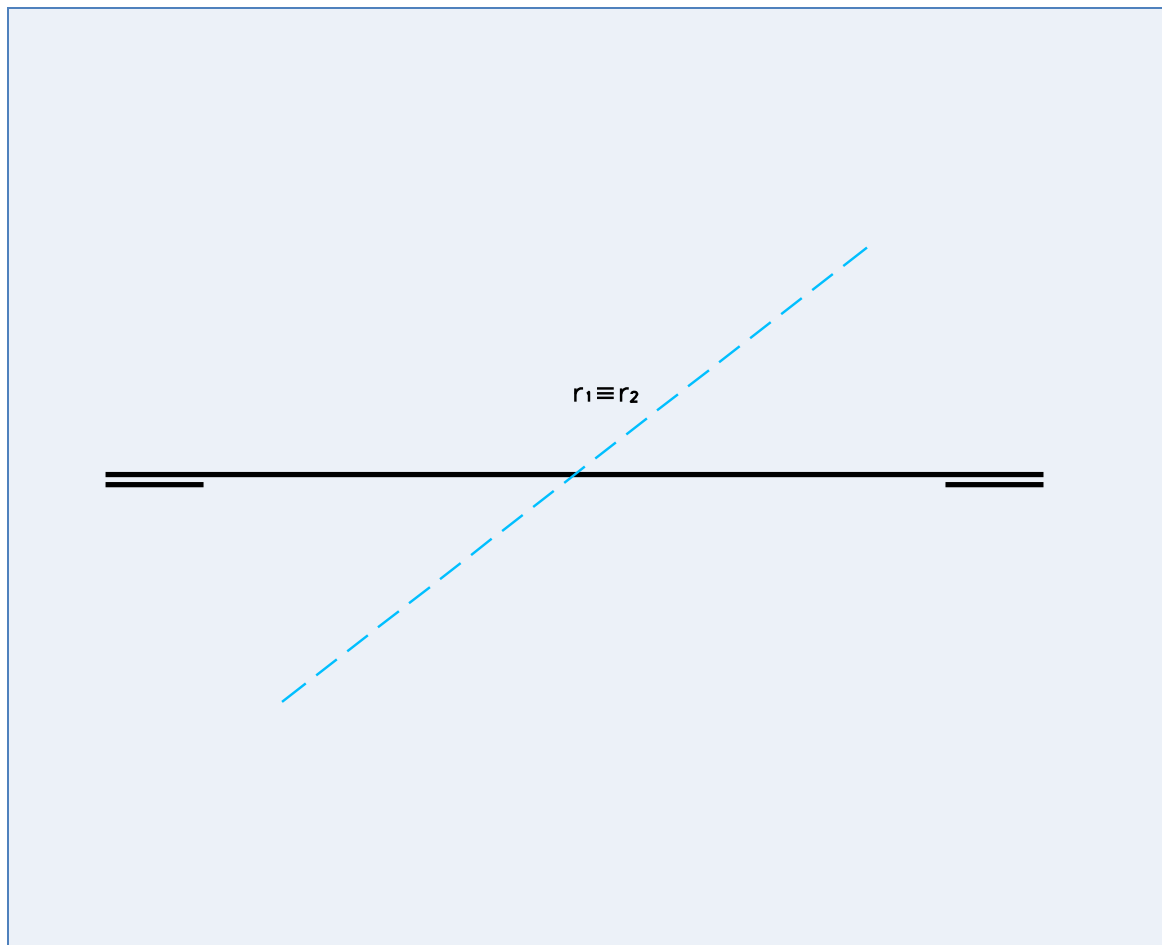
**Figura 26. Recta que corta a LT**

Como caso particular la recta puede estar sobre el primer plano bisector.



**Figura 27. Recta que corta a LT del primer bisector**

Como caso particular la recta puede estar sobre el segundo plano bisector.

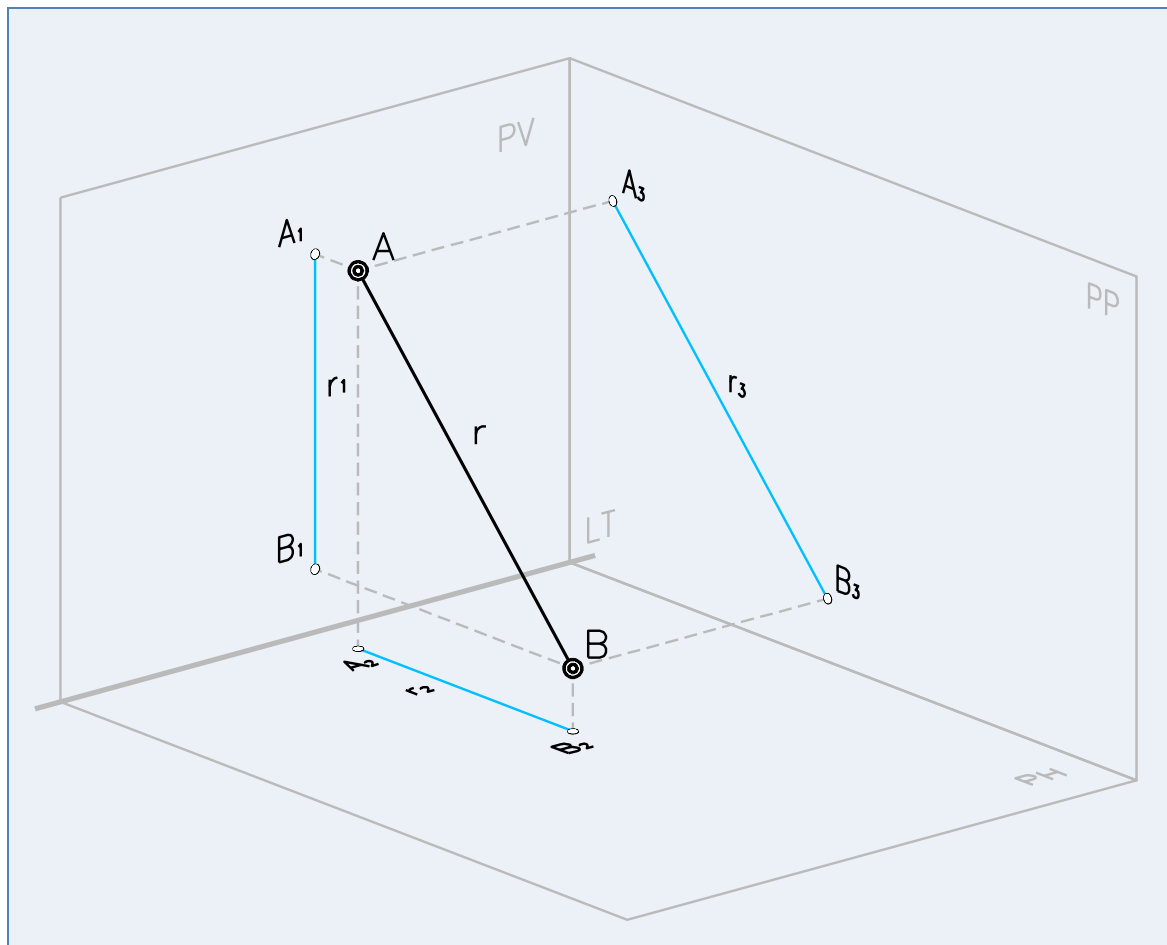


**Figura 28. Recta que corta a LT del segundo bisector**

#### 4.3.5. Recta de perfil (no pasa por LT)

Es paralela al plano de perfil, tiene trazas con **PH** y **PV**.

Sus proyecciones  $r_1$  y  $r_2$  son perpendiculares a **LT**. Para conocer su inclinación se necesita el plano de perfil **PP**.



**Figura 29. Recta de perfil 3D**



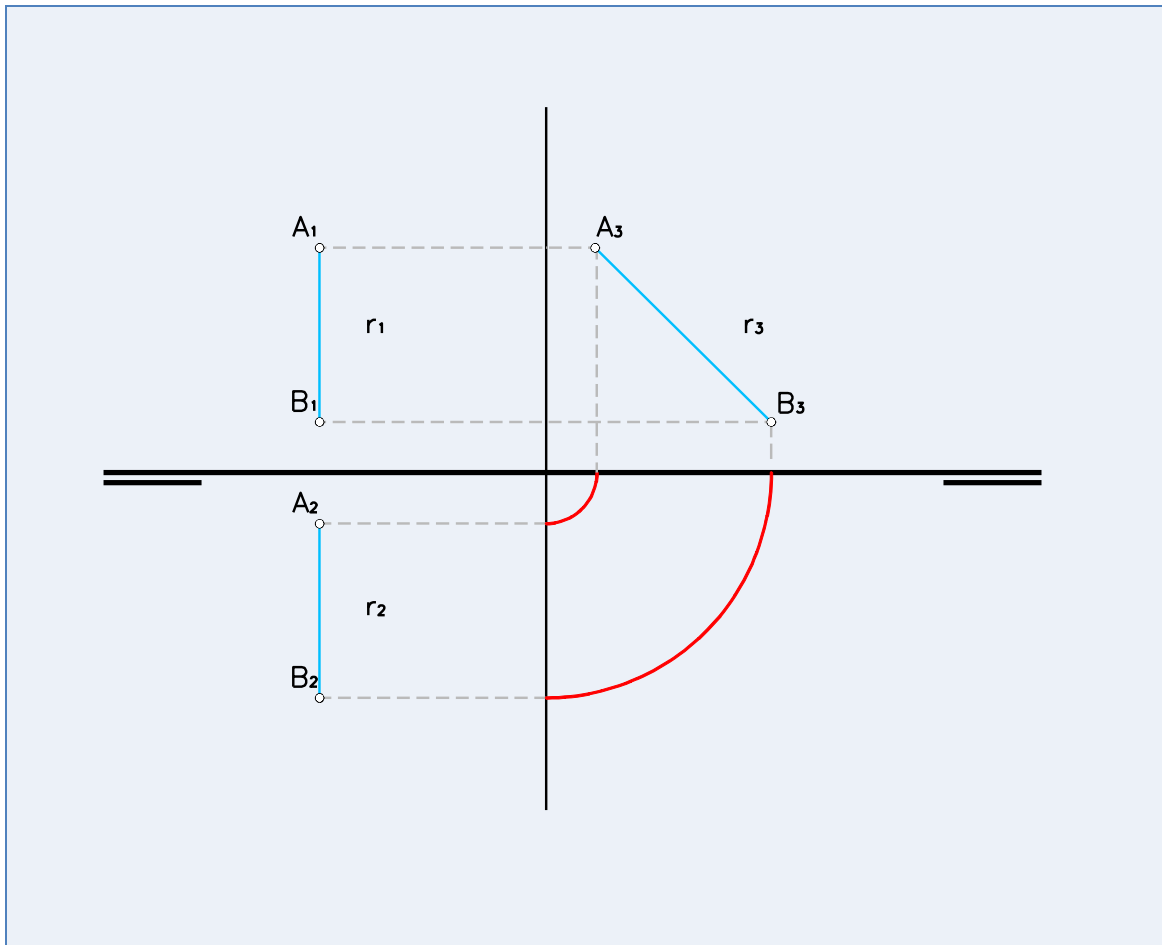


Figura 30. Recta de perfil

## 4.3.6. Recta vertical

Es paralela al plano **PV** y perpendicular a **PH**, tiene traza con **PH**. Su proyección  $r_1$  es perpendicular a **LT** y  $r_2$  es un punto que coincide con la traza de la recta.

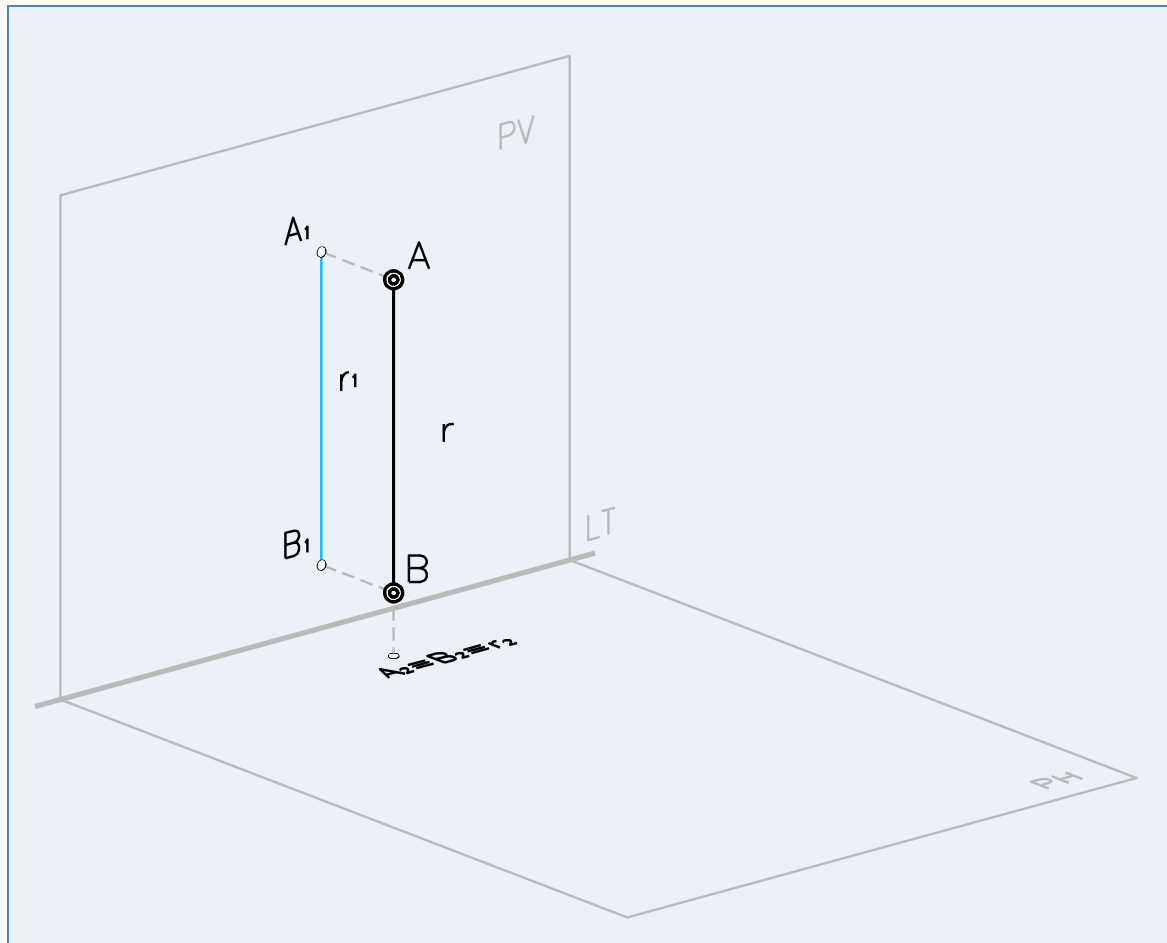
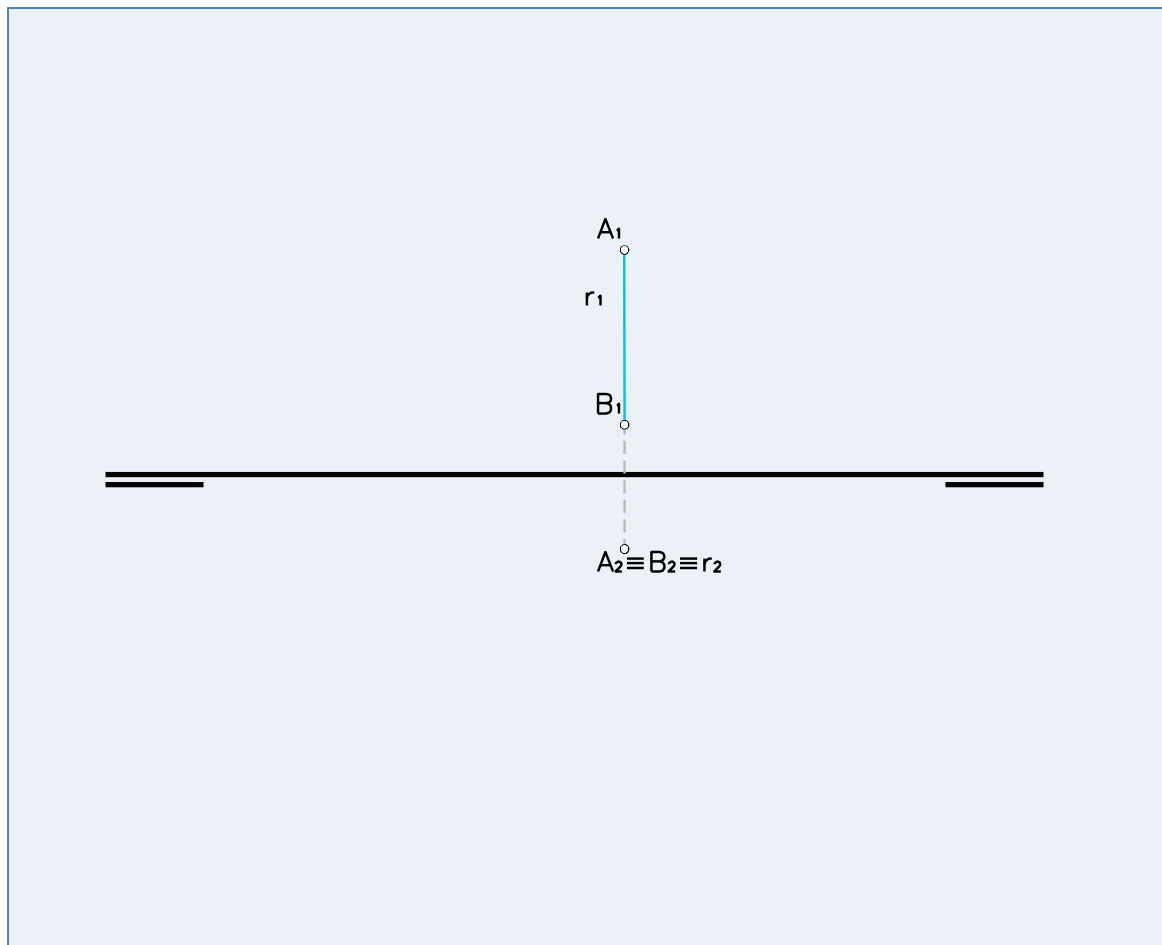


Figura 31. Recta vertical 3D



**Figura 32. Recta vertical**

## 4.3.7. Recta de punta

Es perpendicular al plano **PV** y paralela a **PH**, tiene traza con **PV**. Su proyección  $r_2$  es perpendicular a **LT** y  $r_1$  es un punto que coincide con la traza de la recta.

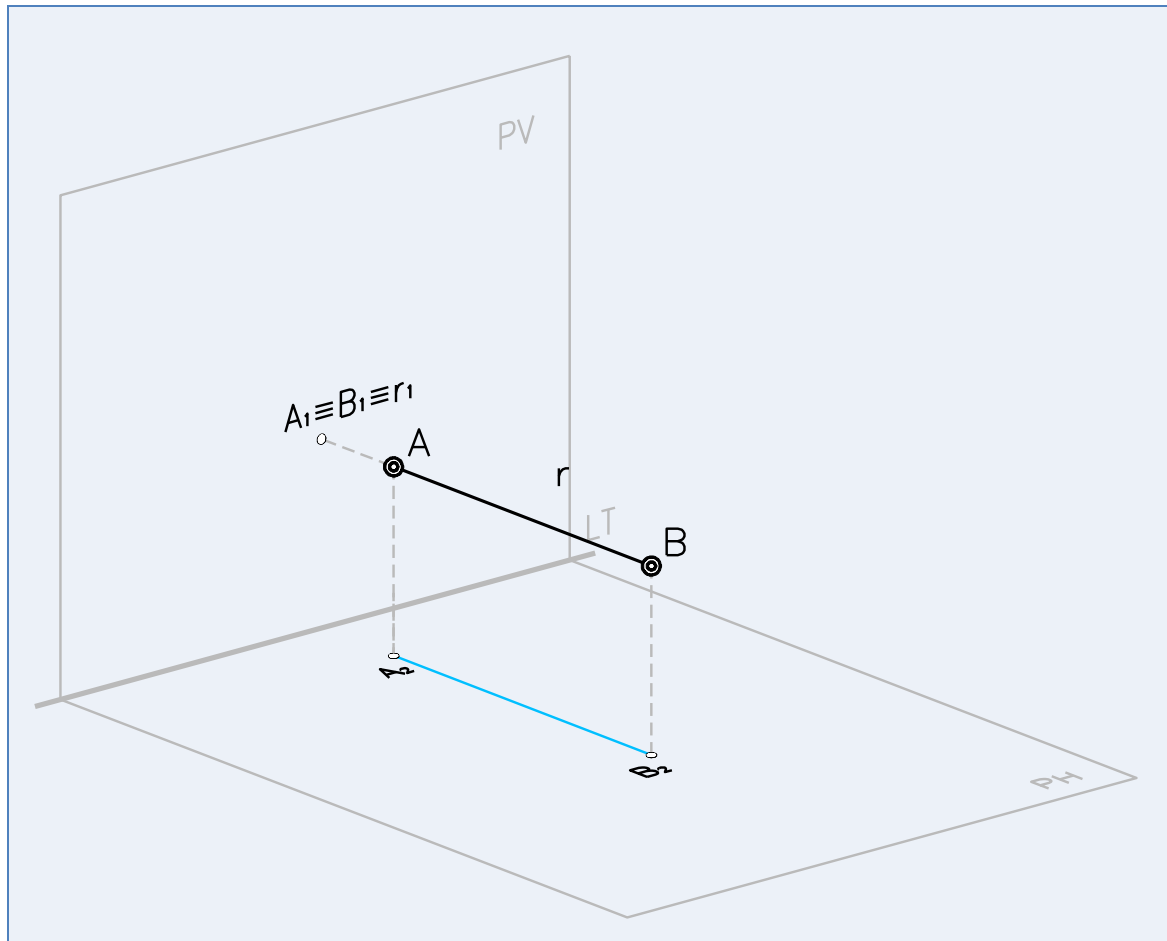


Figura 33. Recta de punta 3D

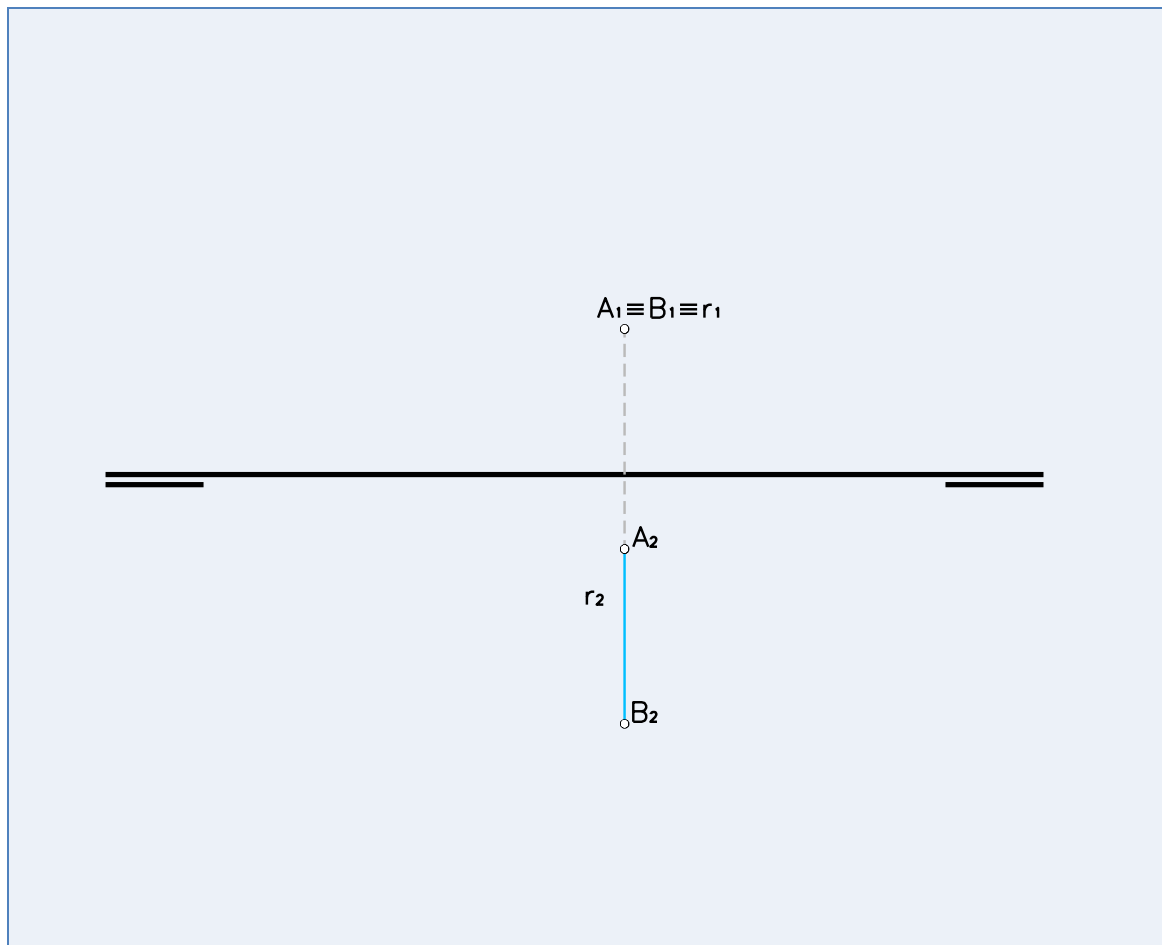


Figura 34. Recta de punta

#### 4.3.8. Recta genérica o de posición general

Es oblicua a los planos de proyección **PH**, **PV** y **PP**. Sus proyecciones  $r'$ ,  $r''$  y  $r'''$  forman cualquier ángulo con **LT**.

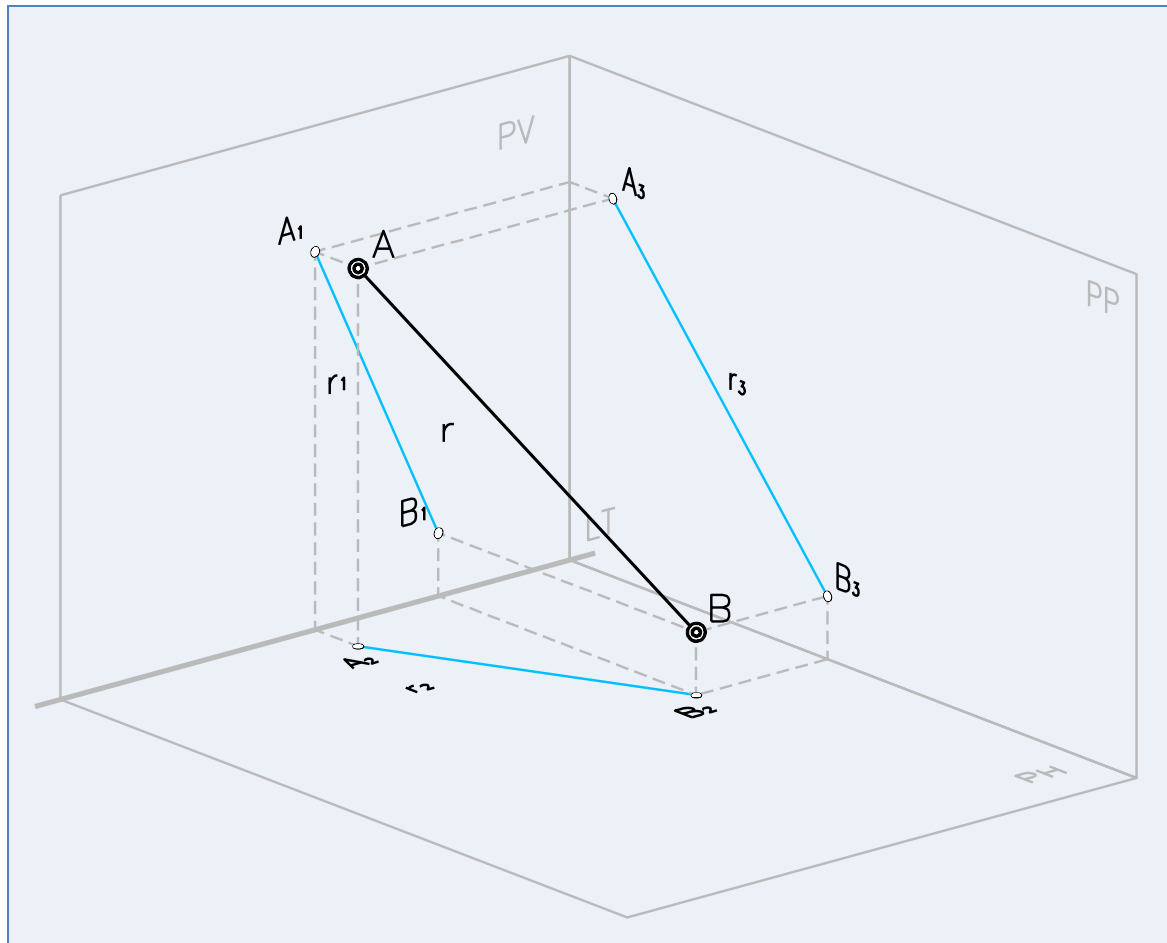


Figura 35. Recta en posición general 3D

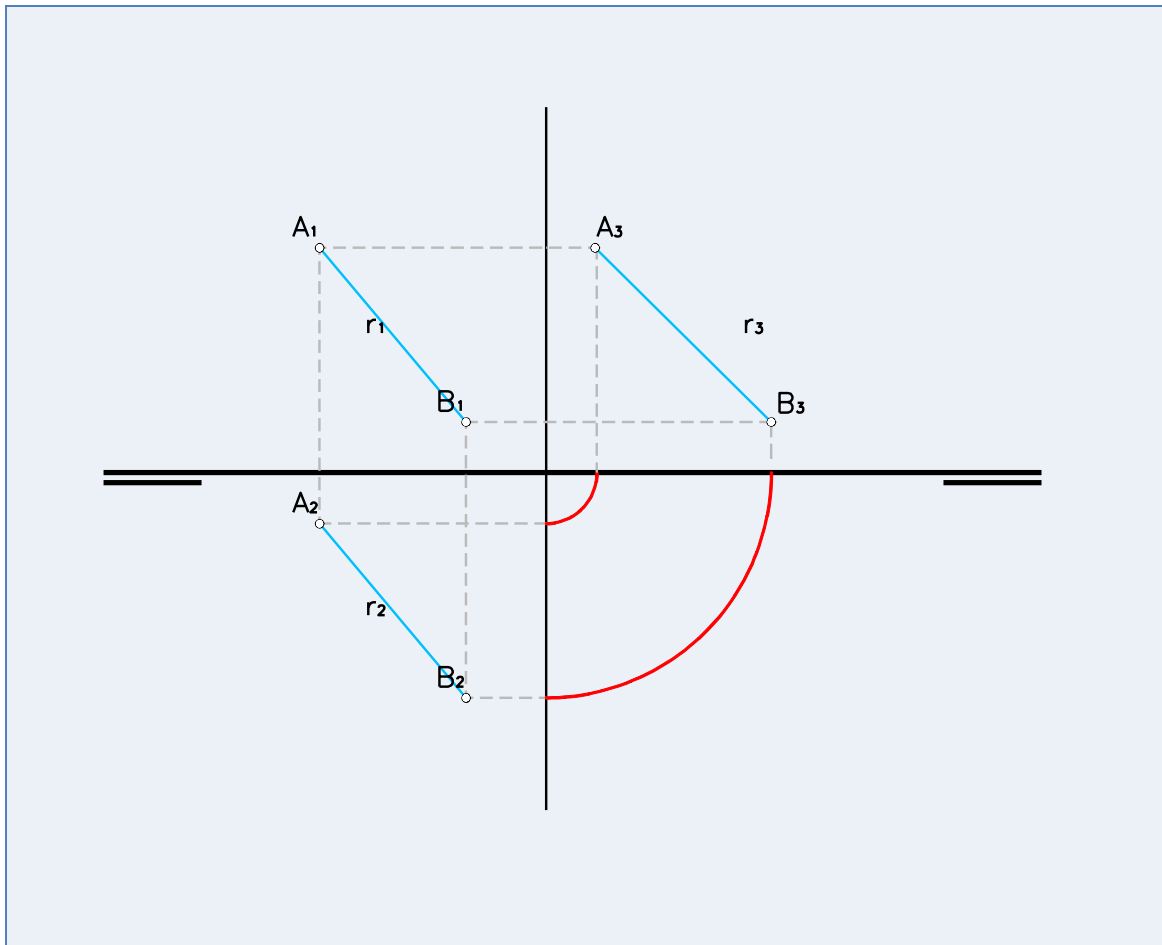
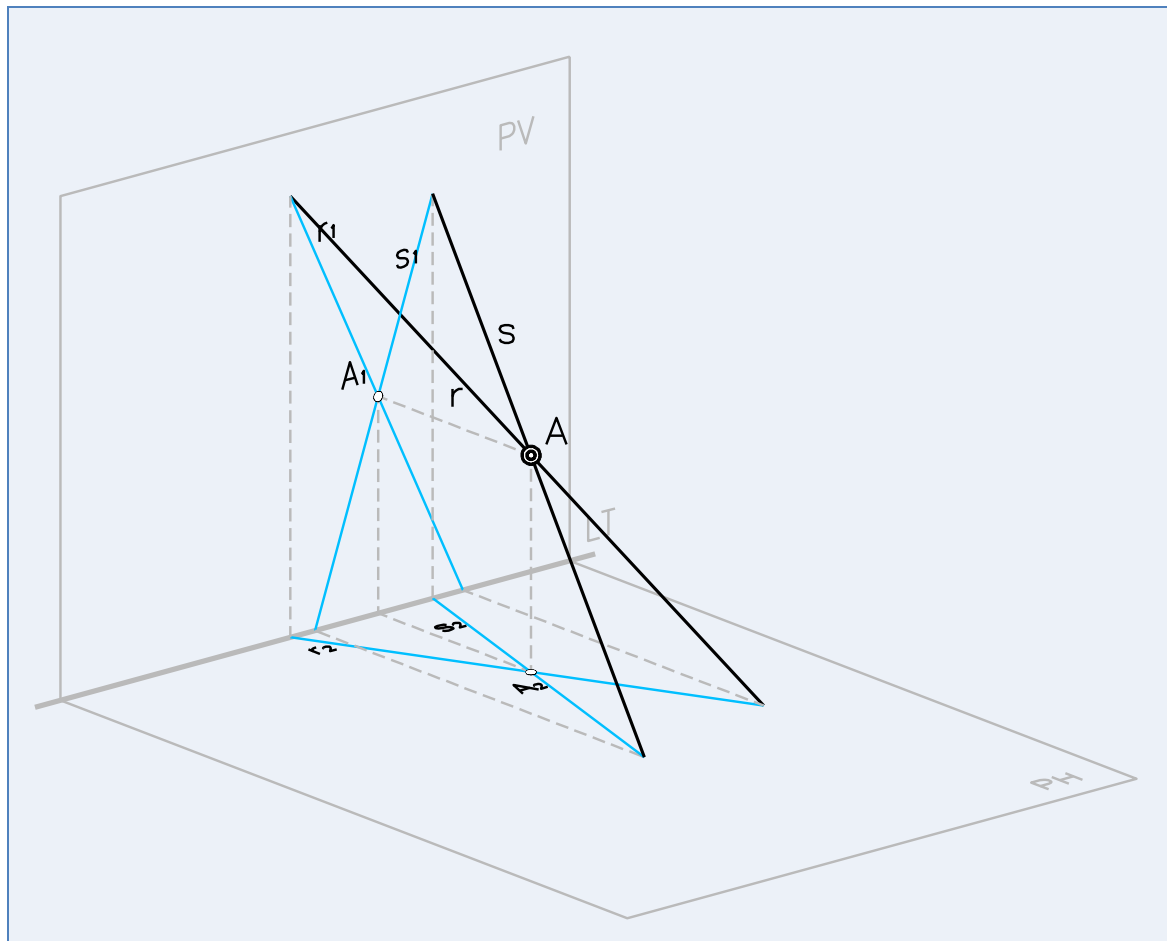


Figura 36. Recta en posición general

## 4.4. Posiciones relativas de dos rectas

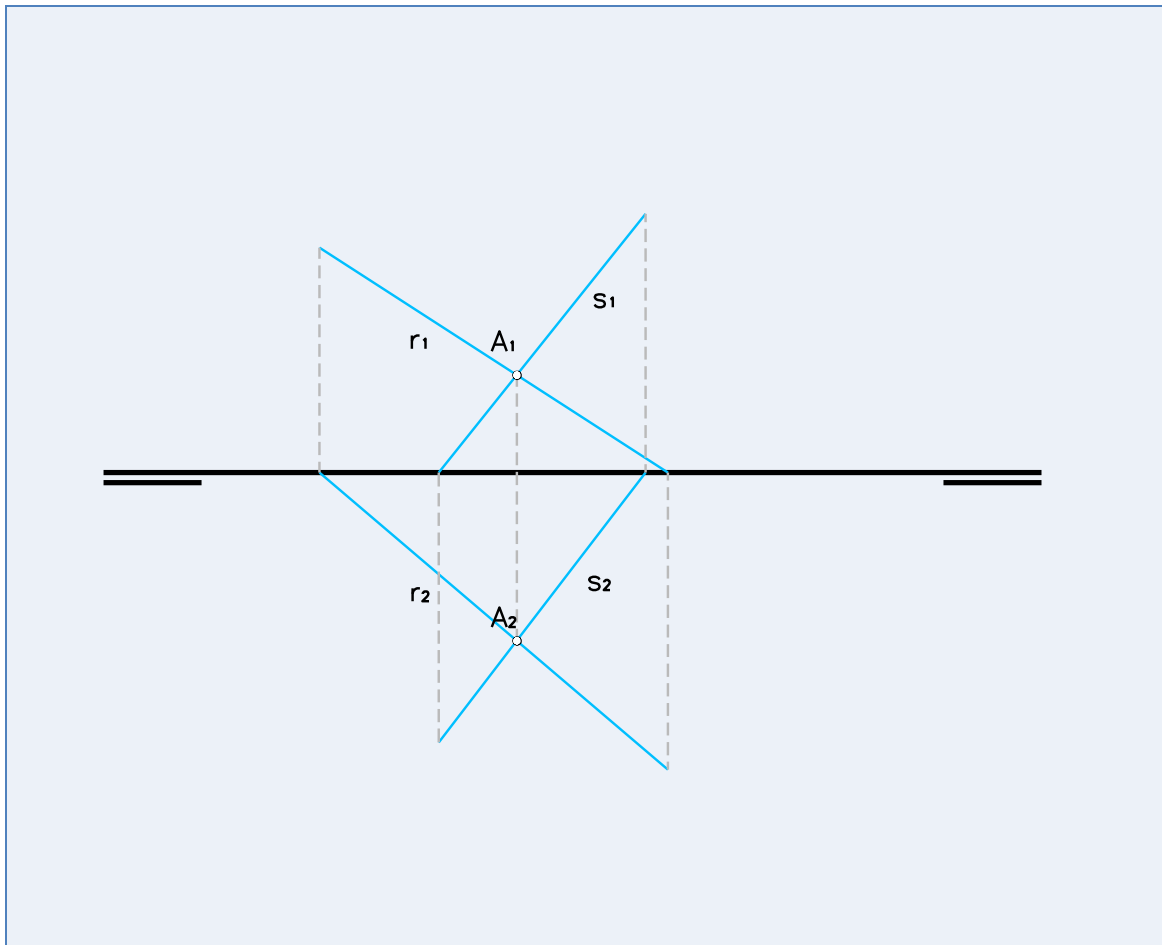
### 4.4.1. Rectas que se cortan

Dos rectas se cortan si tienen un punto en común, de lo contrario las rectas se cruzan.



**Figura 37. Rectas que se cortan 3D**





**Figura 38. Rectas que se cortan**

#### 4.4.2. Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si sus proyecciones son paralelas entre sí. Por tanto, nunca se cortarán o cruzarán sus proyecciones.

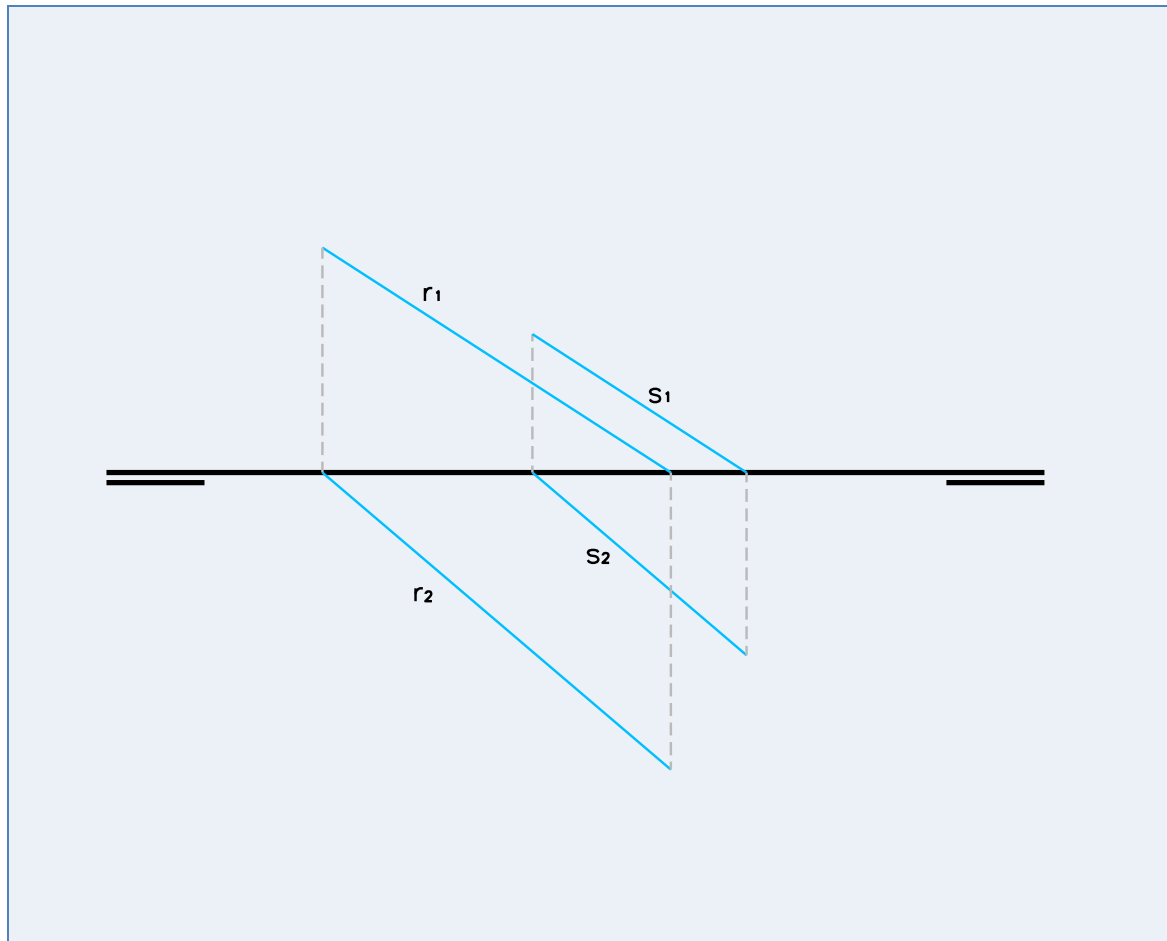


Figura 39. Rectas paralelas



# Tema 5

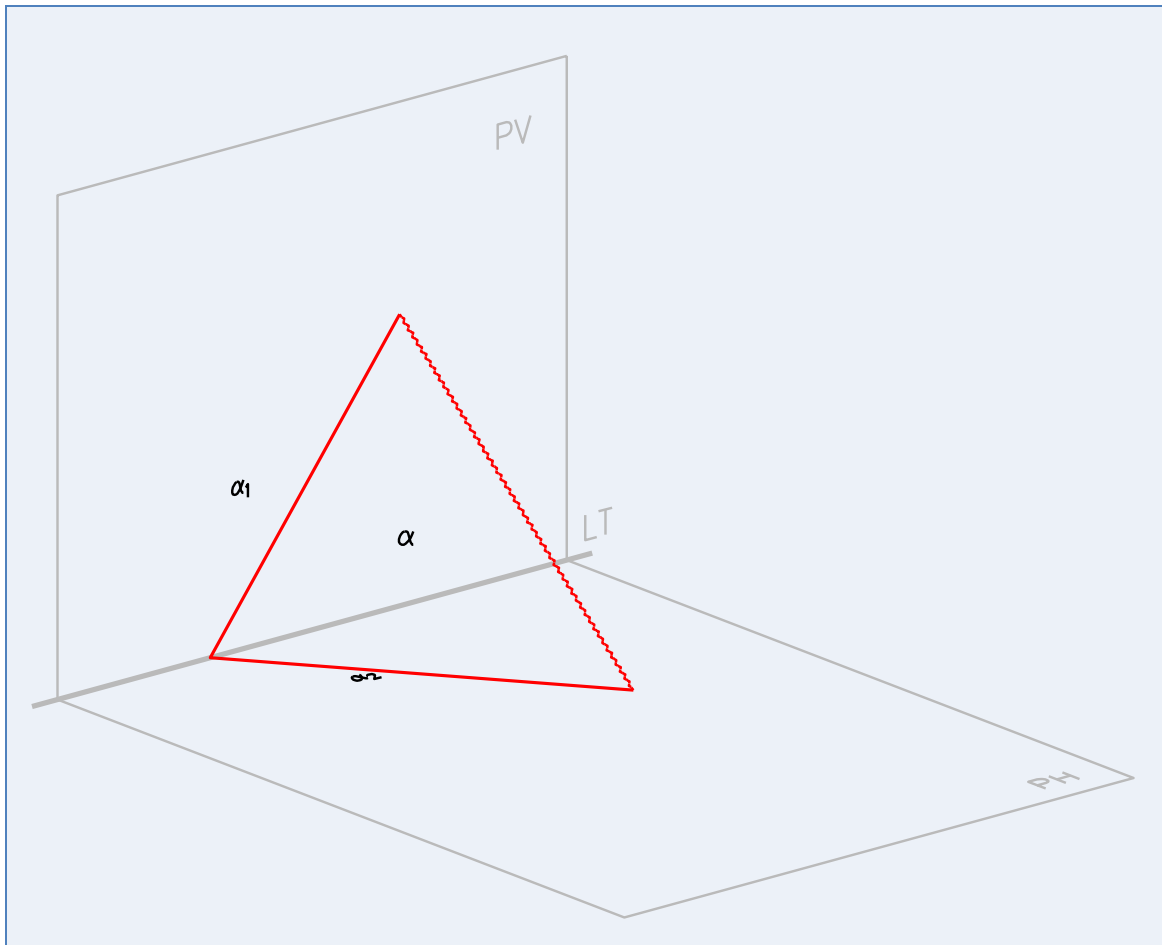
## El plano

### 5.1. Representación

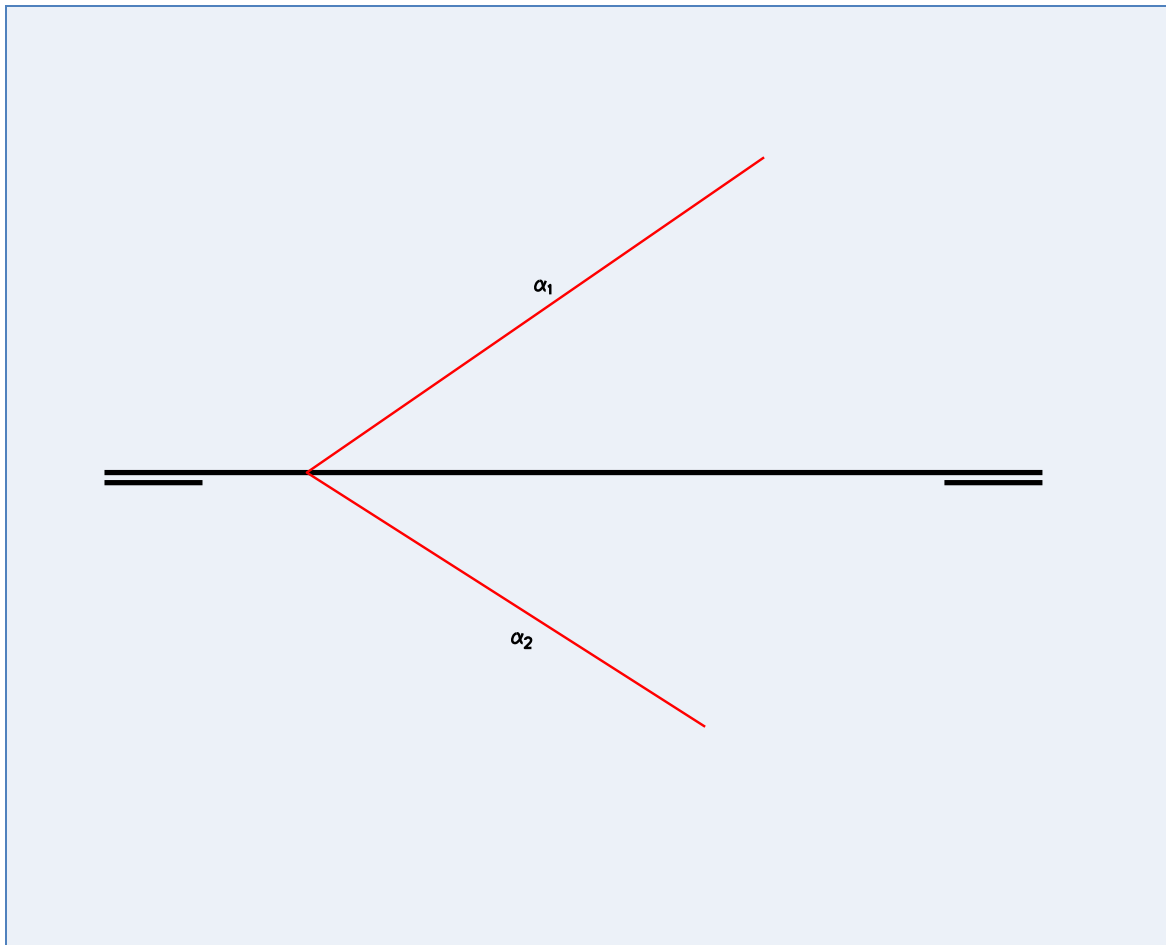
El plano es la superficie más sencilla que existe y quedará totalmente definido si conocemos alguno de los siguientes conjuntos de datos:

- Una recta y un punto exterior a ella
- Tres puntos no alineados
- Dos rectas que se cortan
- Dos rectas paralelas

La intersección de dos planos es una recta y la de tres planos un punto. El plano se representa mediante sus rectas de intersección con los planos de proyección. Estas rectas se llaman trazas y las denominaremos con una letra griega y el subíndice numérico en referencia al plano de proyección al que pertenece dicha traza (por ejemplo  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ).



**Figura 40. Representación de un plano 3D**



**Figura 41. Representación de un plano**

Una recta pertenece a un plano si las trazas de la recta están contenidas dentro de las trazas homónimas del plano.

Un punto pertenece a un plano si está situado sobre una recta de ese plano, para trabajar este aspecto normalmente se emplean rectas auxiliares horizontales y frontales del plano.

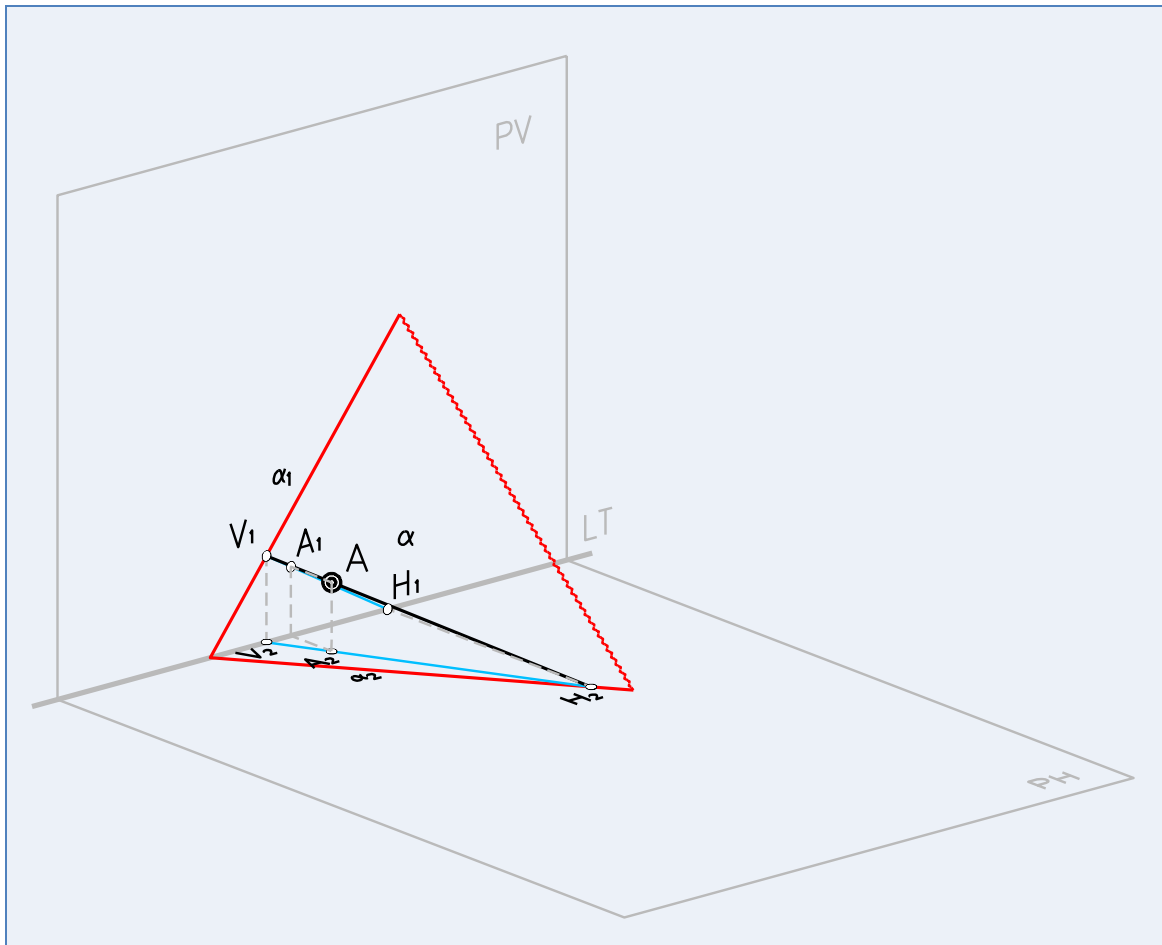
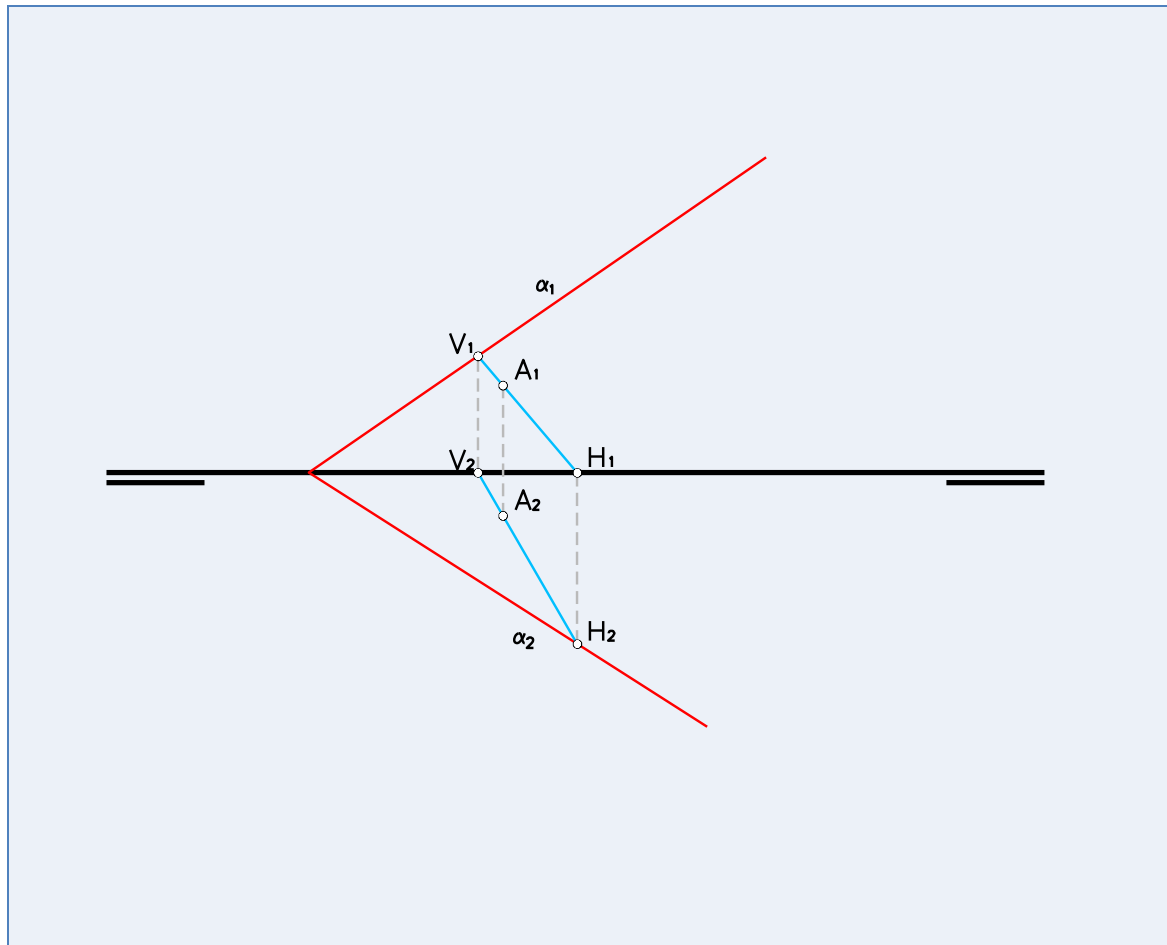


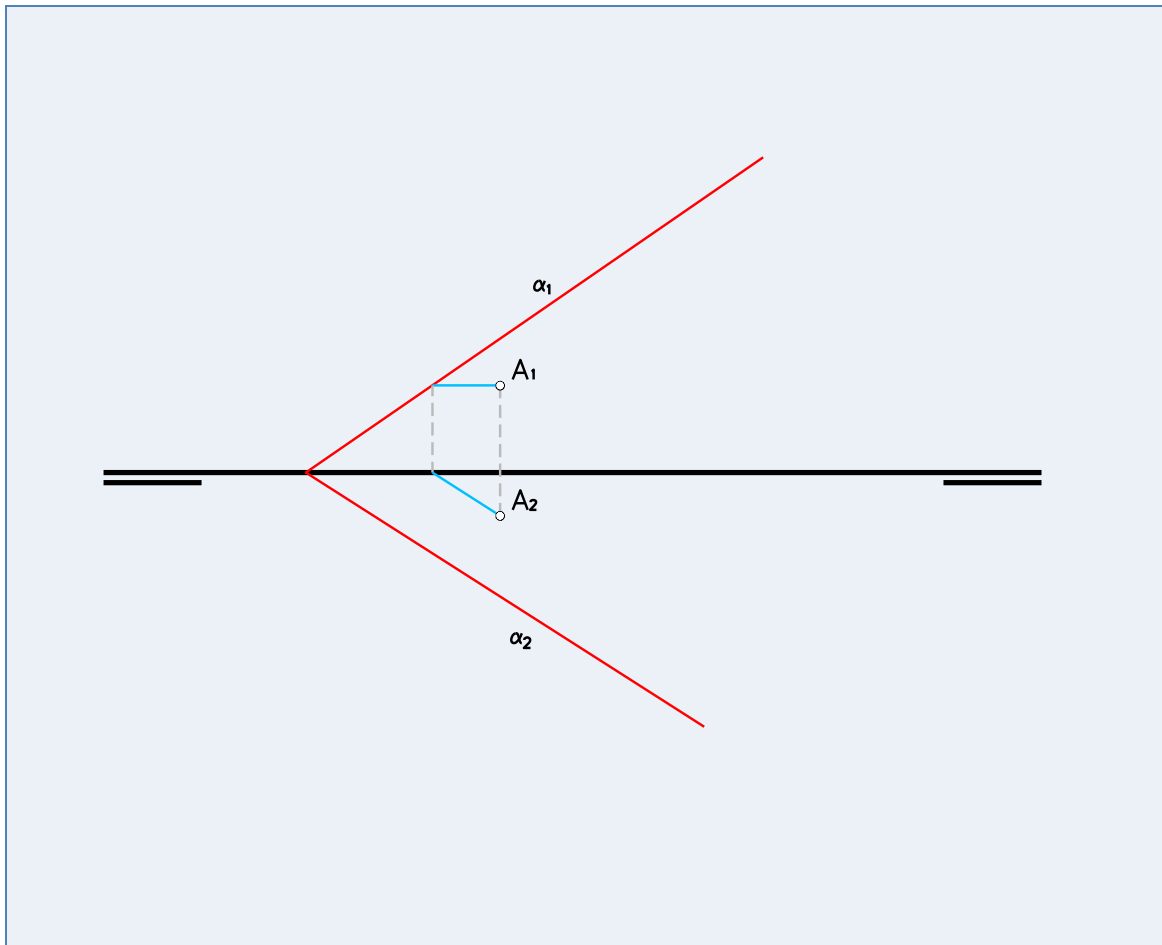
Figura 42. Pertenencia de un punto a un plano 3D



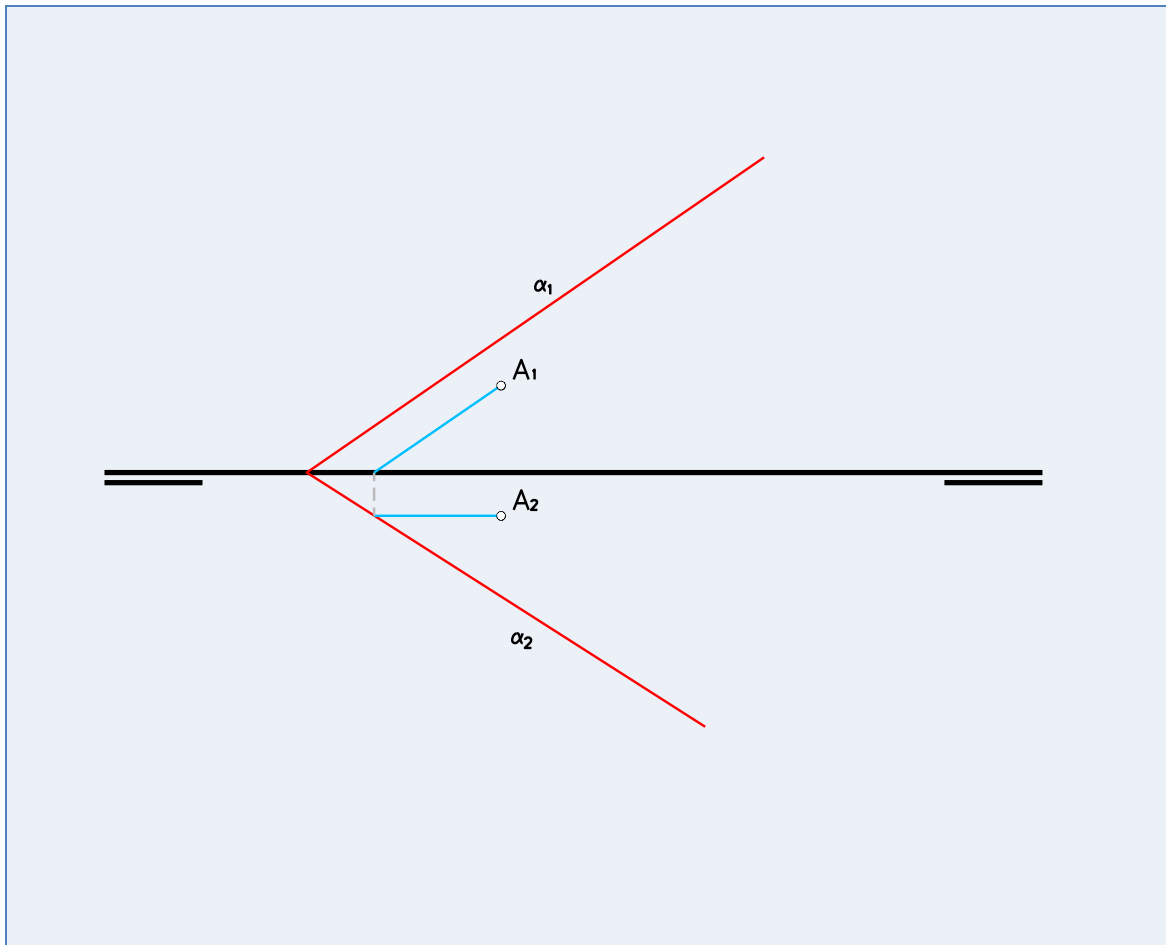
**Figura 43. Pertenencia de un punto a un plano**

Para identificar la pertenencia de un punto a un plano solemos utilizar rectas que nos sean cómodas, como por ejemplo rectas frontales y horizontales como las expuestas en la Figura 44 y en la Figura 45.





**Figura 44. Pertenencia de un punto a un plano mediante recta horizontal**



**Figura 45. Pertenencia de un punto a un plano mediante recta frontal**

## 5.2. Posiciones de un plano

### 5.2.1. Plano horizontal

Es paralelo al plano horizontal de proyección **PH**, por lo tanto no hay traza  $\alpha_2$  y es perpendicular a los planos:

- vertical **PV**, **determinando la traza  $\alpha_1$**
- perfil **PP**, **determinando la traza  $\alpha_3$**

Los elementos contenidos en él se proyectan en verdadera magnitud sobre el plano horizontal y.

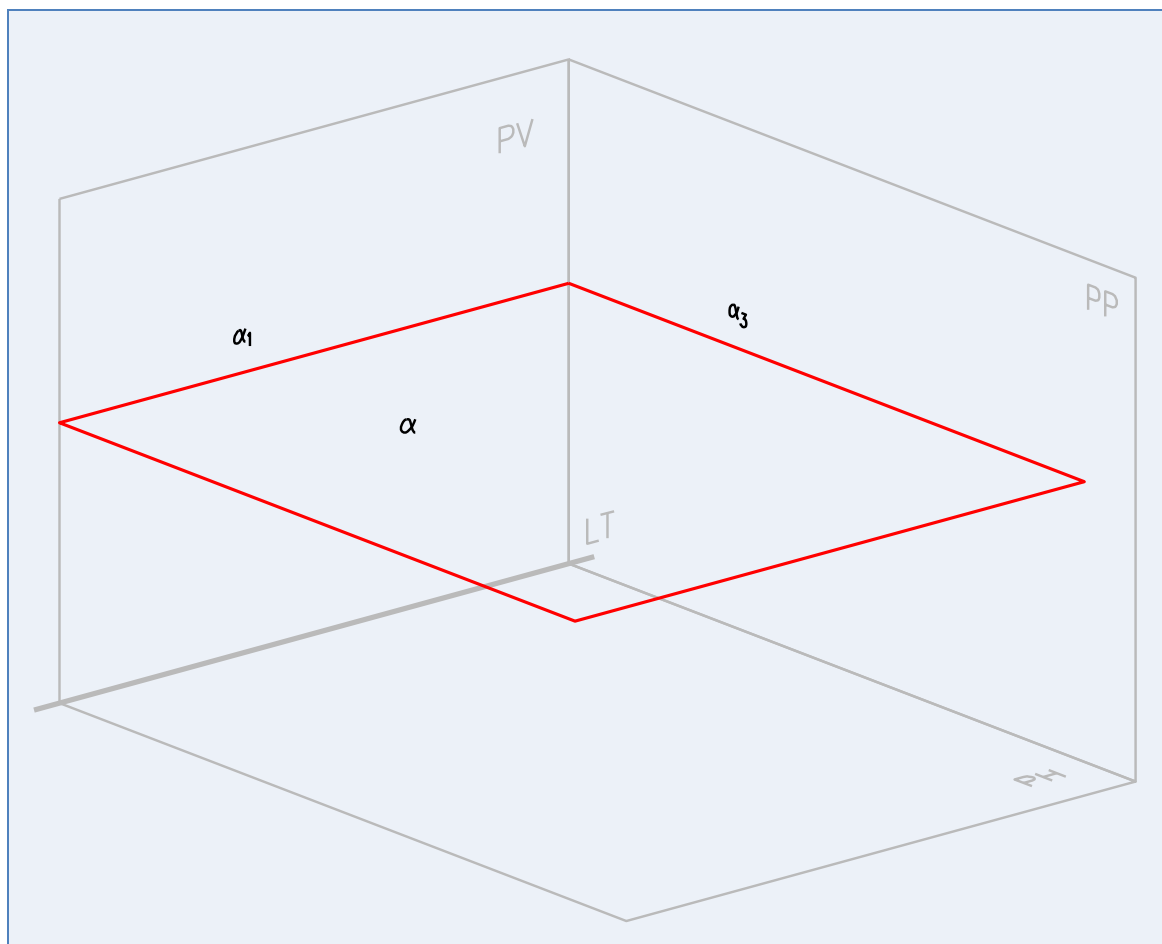
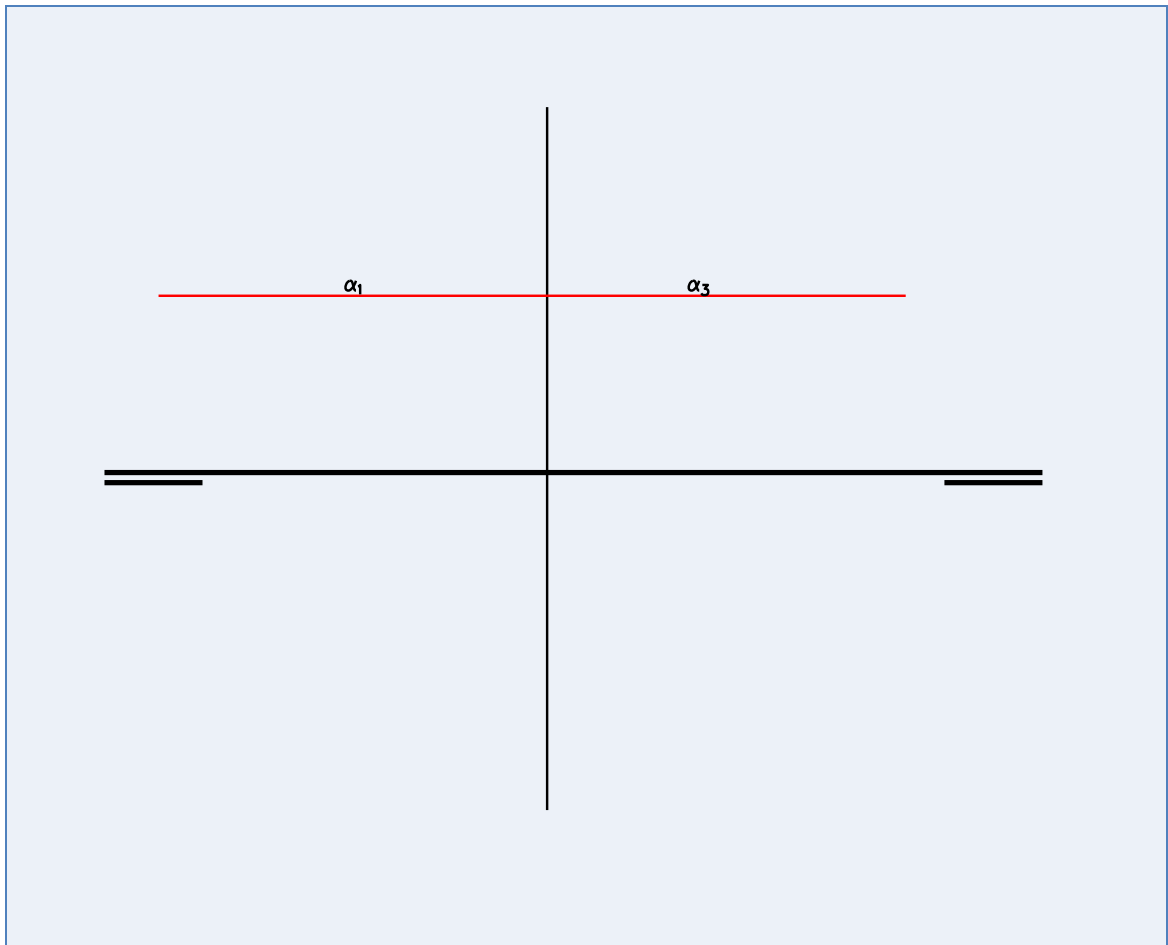


Figura 46. Plano horizontal 3D



**Figura 47. Plano horizontal**

### 5.2.2. Plano frontal

Es paralelo al plano vertical de proyección **PV**, por lo tanto perpendicular a los planos horizontal **PH** (traza  $\alpha_2$ ) y de perfil **PP** (traza  $\alpha_3$ ). Los elementos contenidos en él se proyectan en verdadera magnitud sobre el plano vertical y no hay traza  $\alpha_1$ .

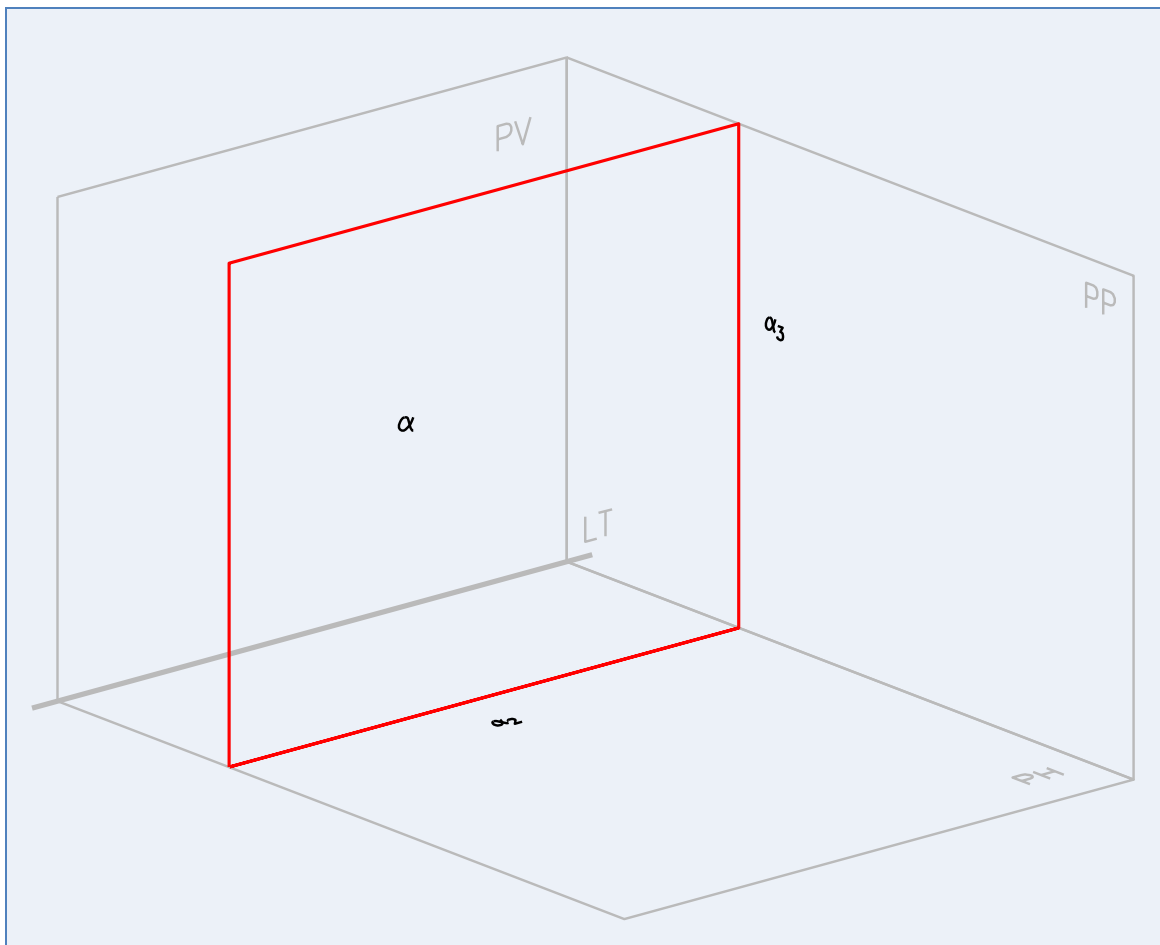
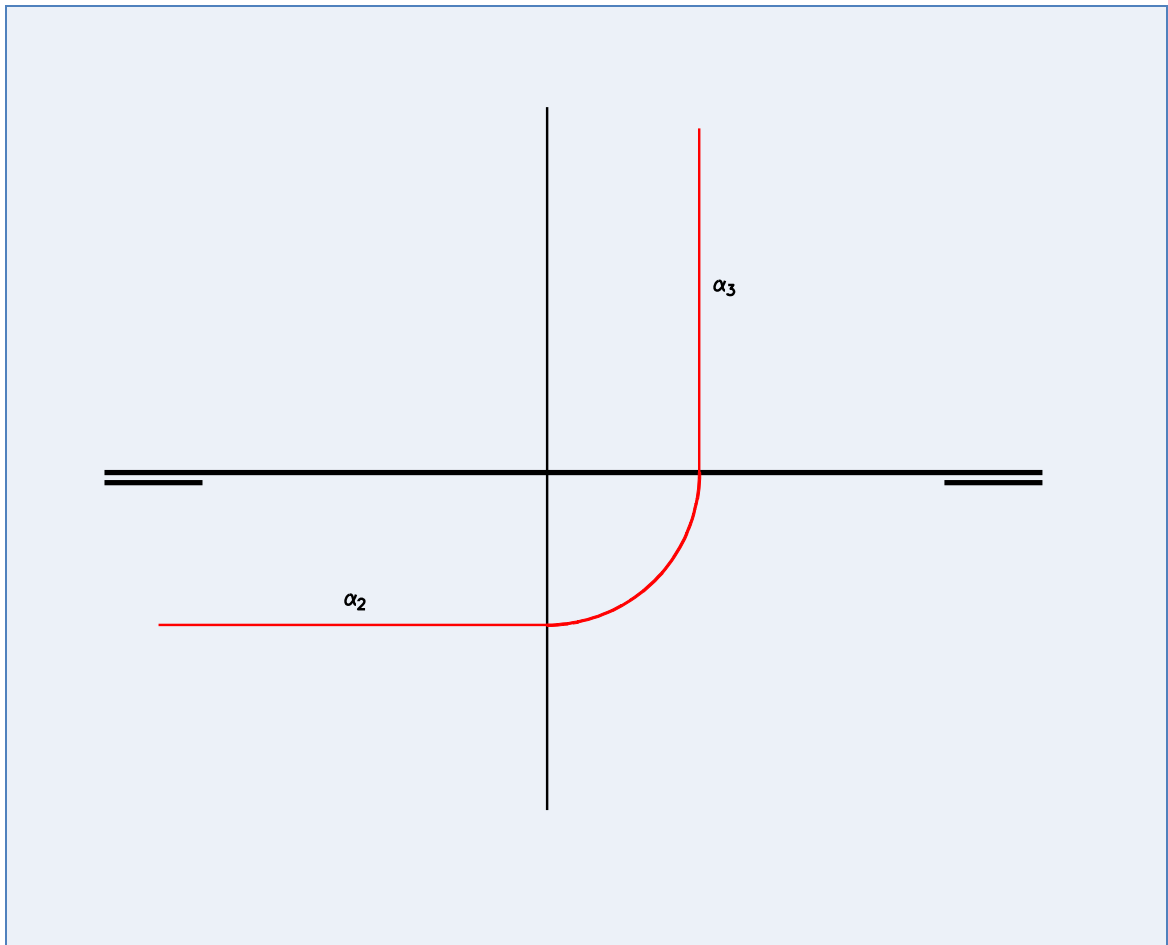


Figura 48. Plano frontal 3D

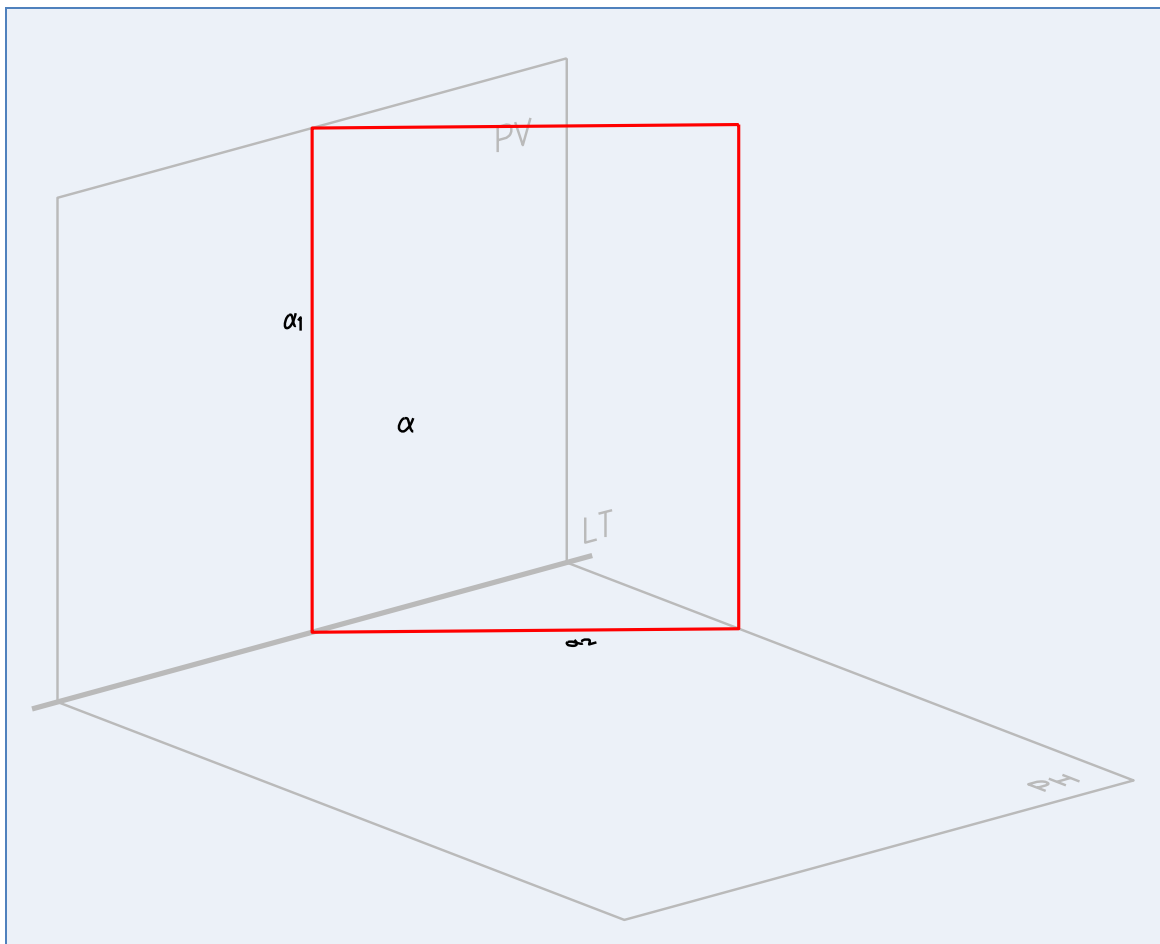


**Figura 49. Plano frontal**

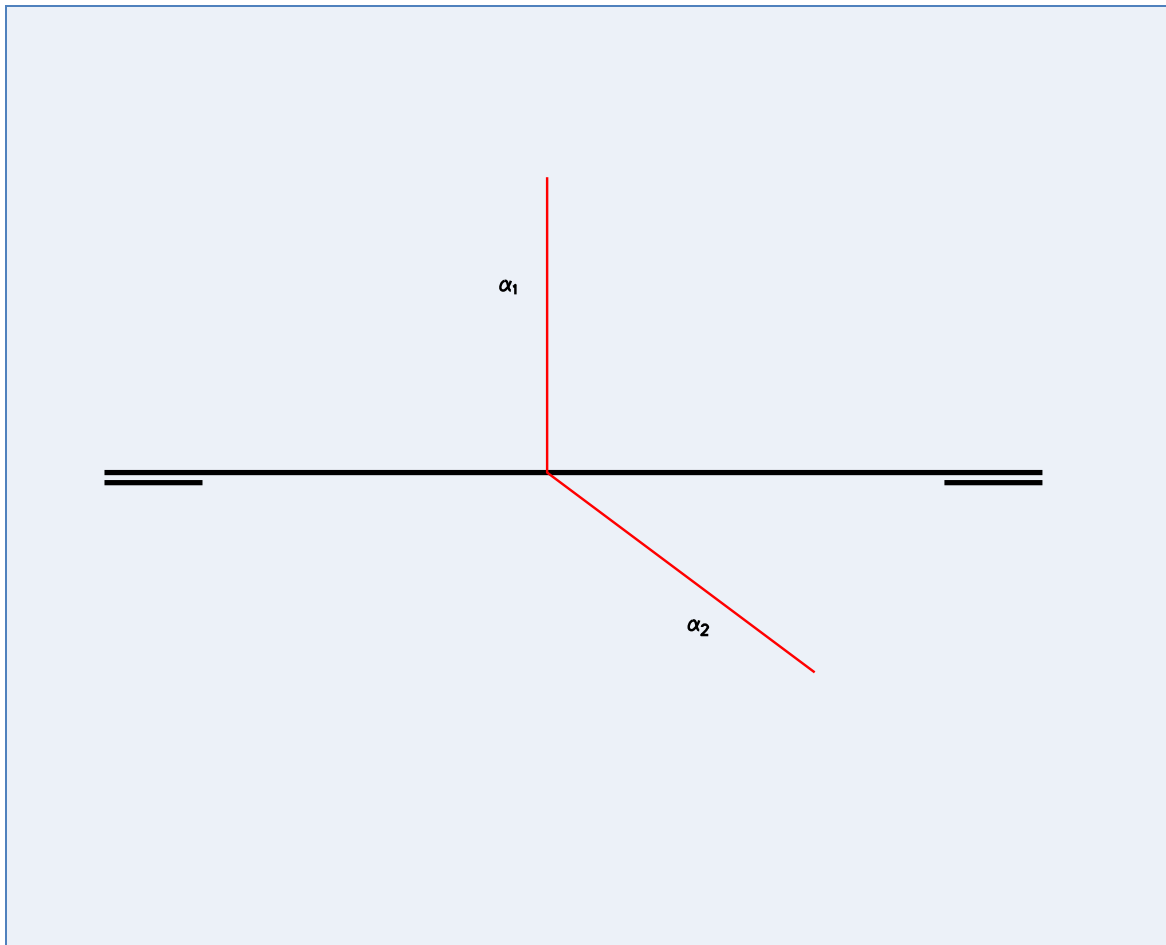
El plano

### 5.2.3. Plano proyectante horizontal

Es perpendicular al plano horizontal **PH**. En la figura descriptiva la traza horizontal  $\alpha_2$  forma un ángulo cualquiera con la línea de tierra **LT** y la traza vertical  $\alpha_1$  es perpendicular a **LT**.



**Figura 50. Plano proyectante horizontal 3D**



**Figura 51. Plano proyectante horizontal**



El plano

#### 5.2.4. Plano proyectante vertical

Es perpendicular al plano vertical **PV**. En la figura descriptiva la traza vertical  $\alpha_1$  forma un ángulo cualquiera con la línea de tierra **LT** y la traza horizontal  $\alpha_2$  es perpendicular a **LT**.

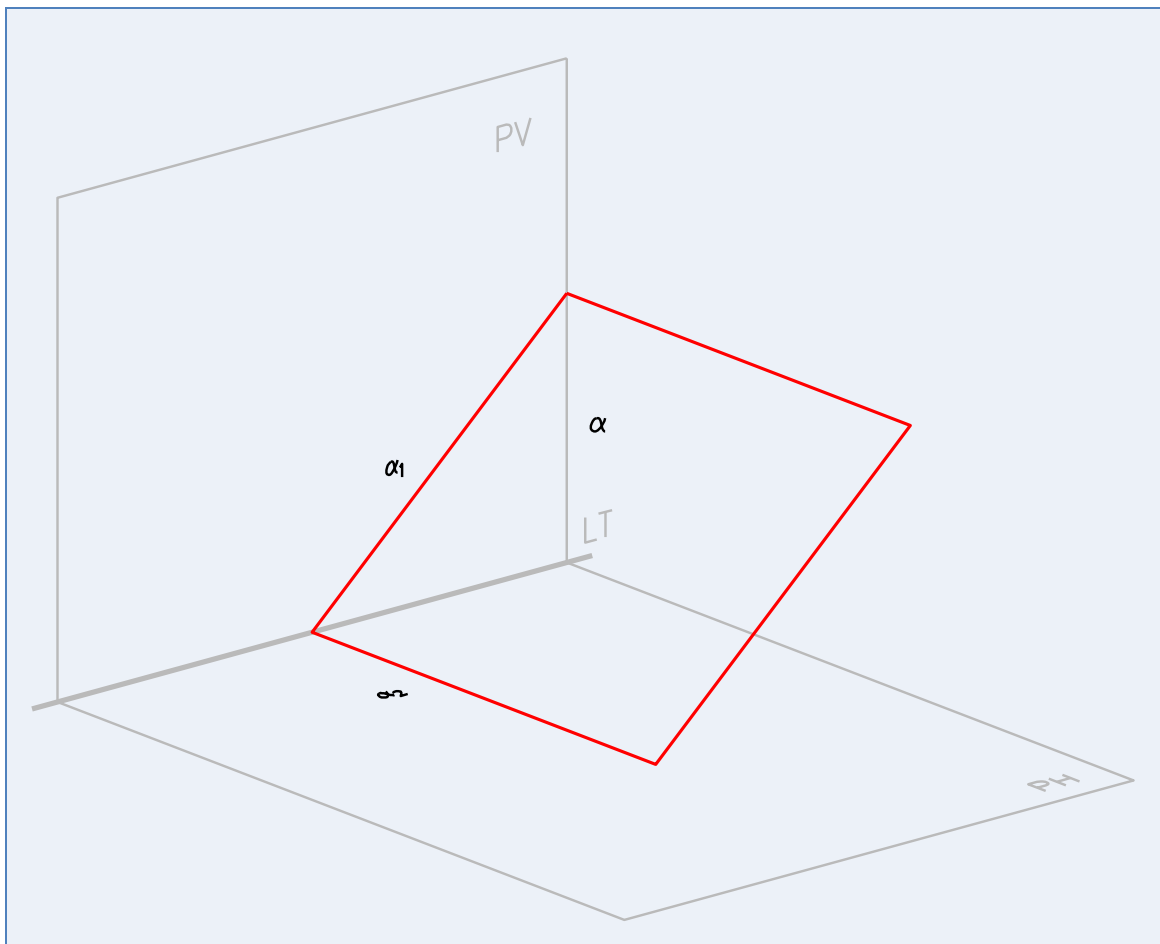
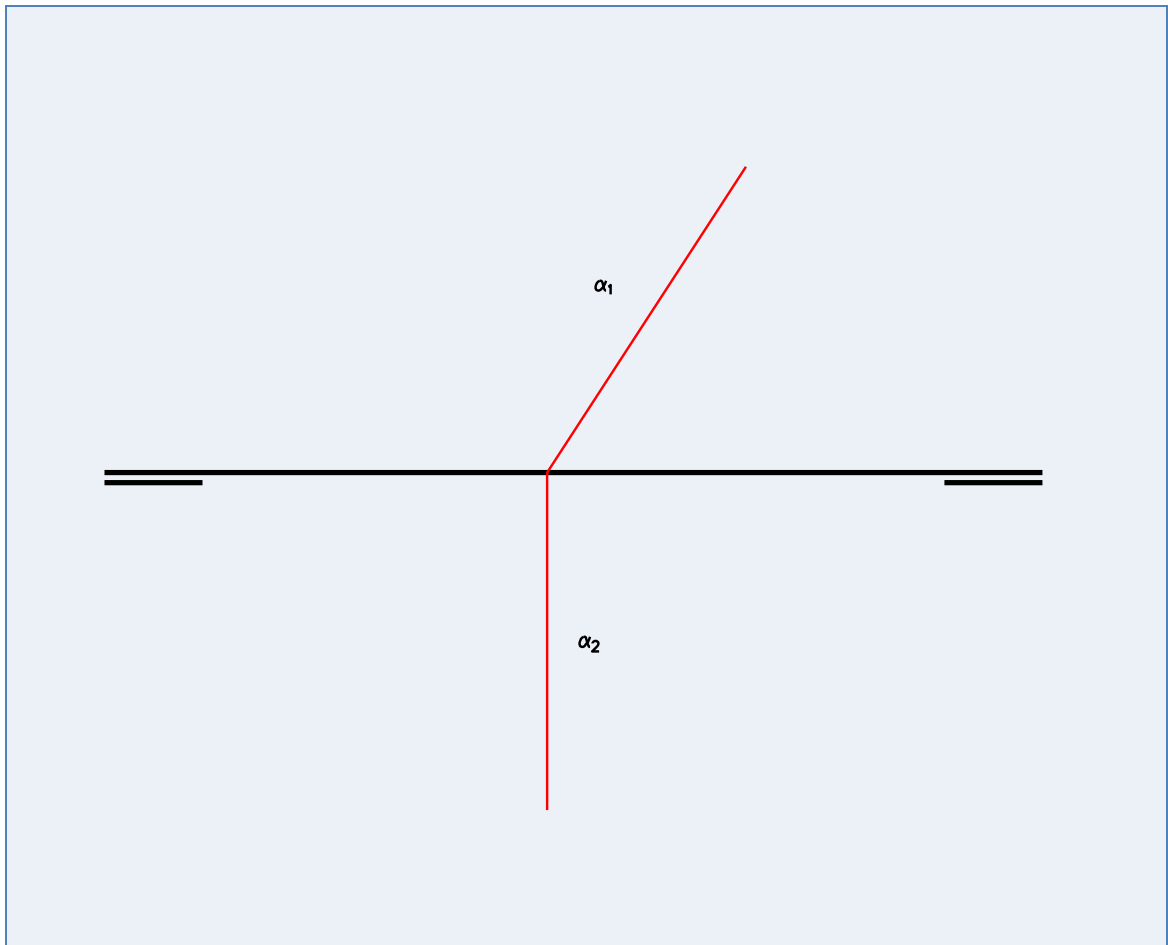


Figura 52. Plano proyectante vertical 3D



**Figura 53. Plano proyectante vertical**

### 5.2.5. Plano de perfil

Es paralelo al plano de perfil **PP**, por lo tanto perpendicular a los planos horizontal **PH** (traza  $\alpha_2$ ) y vertical **PV** (traza  $\alpha_1$ ). Los elementos contenidos en él se proyectan en verdadera magnitud sobre el plano de perfil.

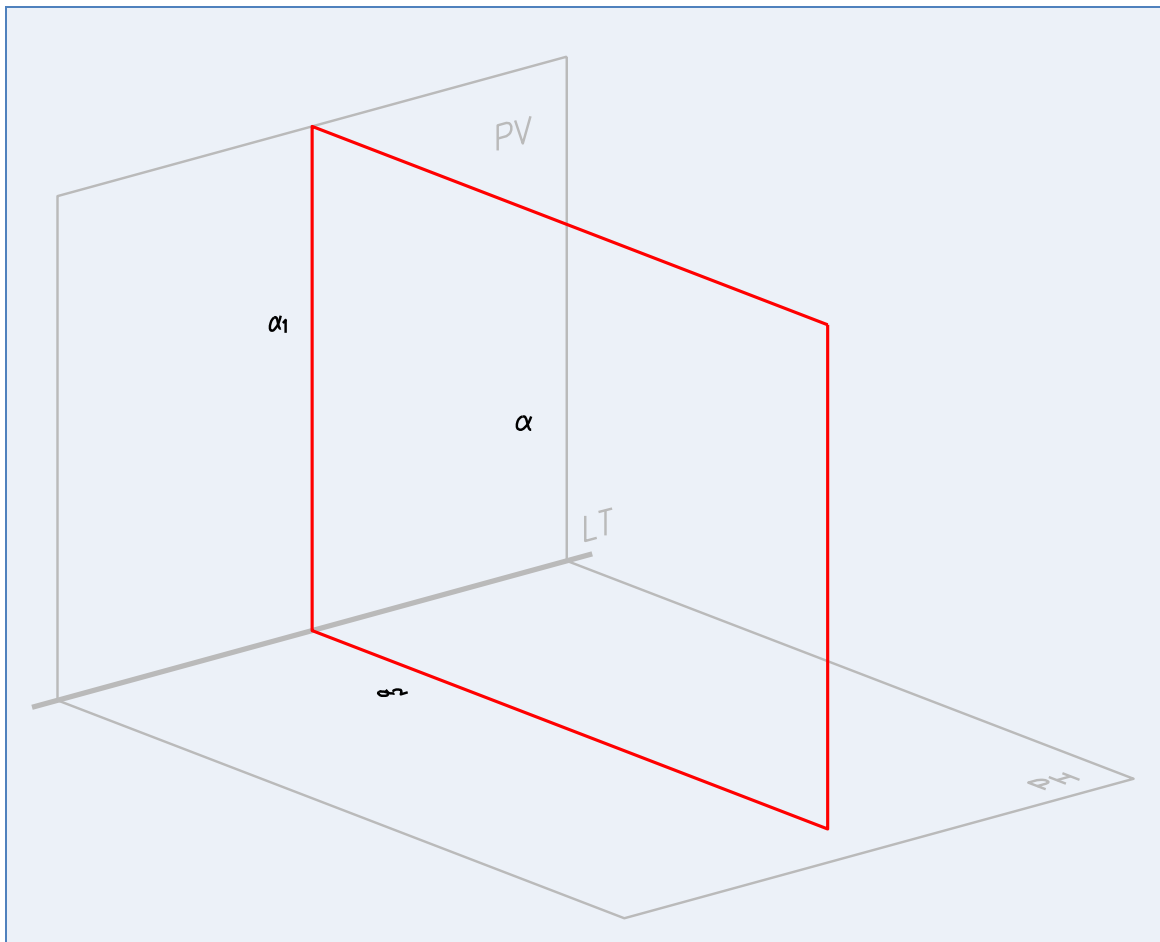
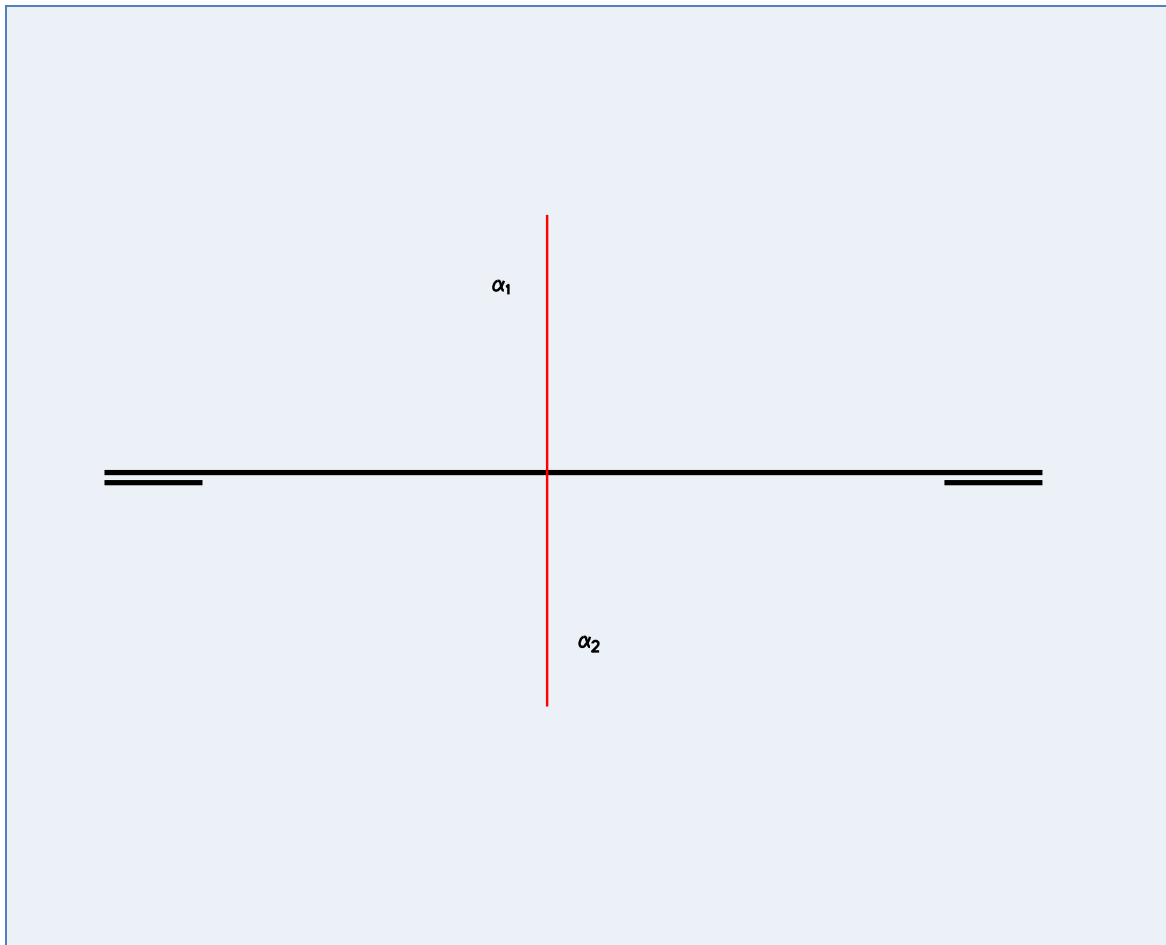


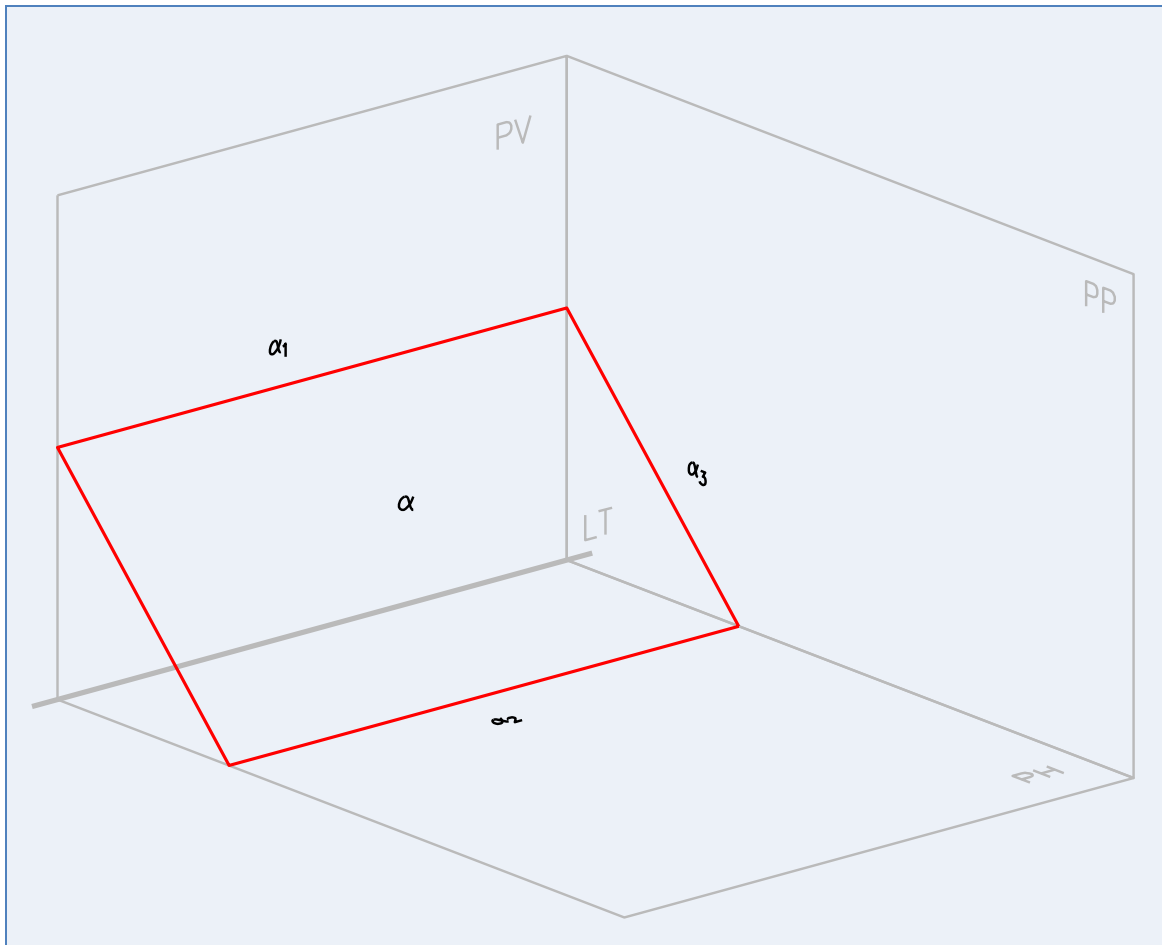
Figura 54. Plano de perfil 3D



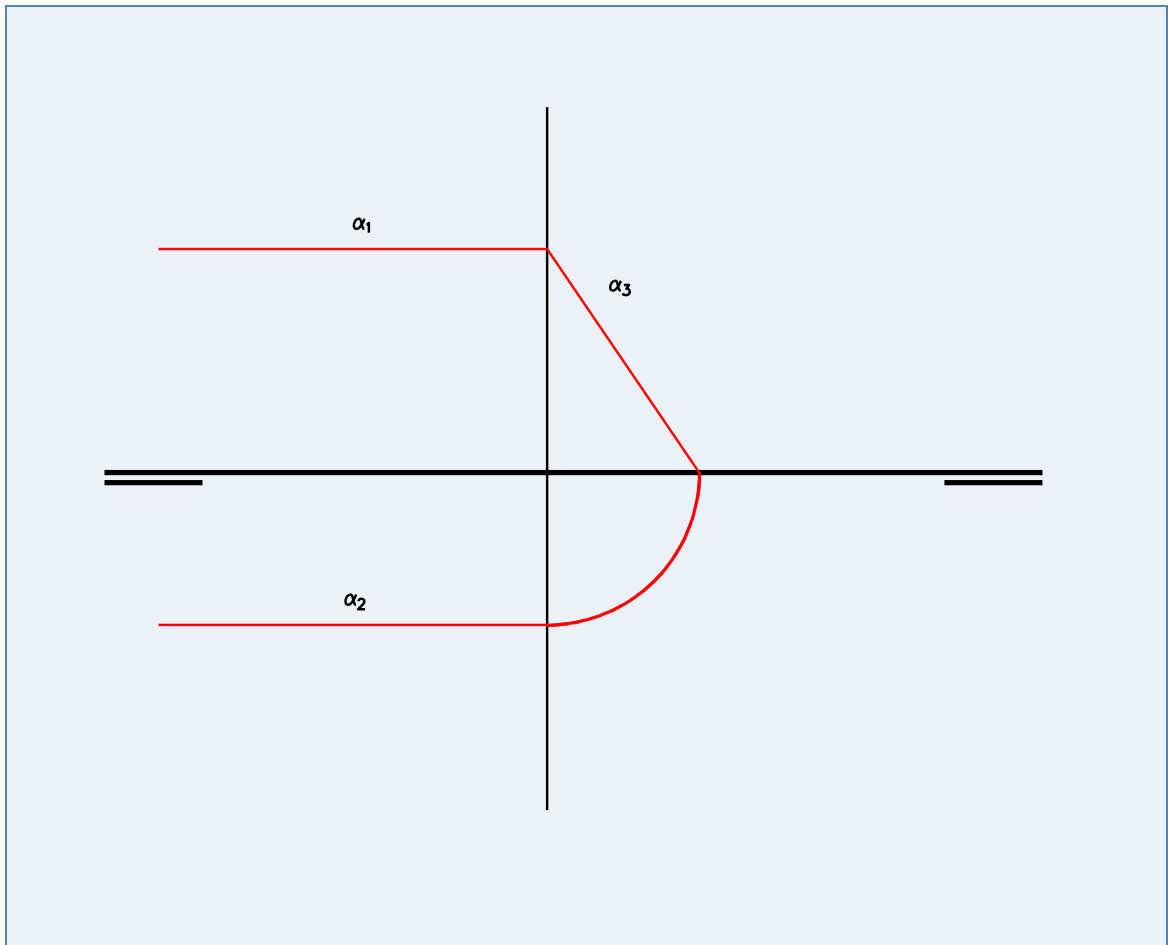
**Figura 55. Plano de perfil**

*5.2.6. Plano proyectante de perfil o plano rampa*

Es perpendicular al plano de perfil **PP**. En la figura descriptiva las trazas horizontal  $\alpha_2$  y vertical  $\alpha_1$  son paralelas a **LT**.



**Figura 56. Plano rampa 3D**



**Figura 57. Plano rampa**

5.2.7. Plano perpendicular al primer bisector

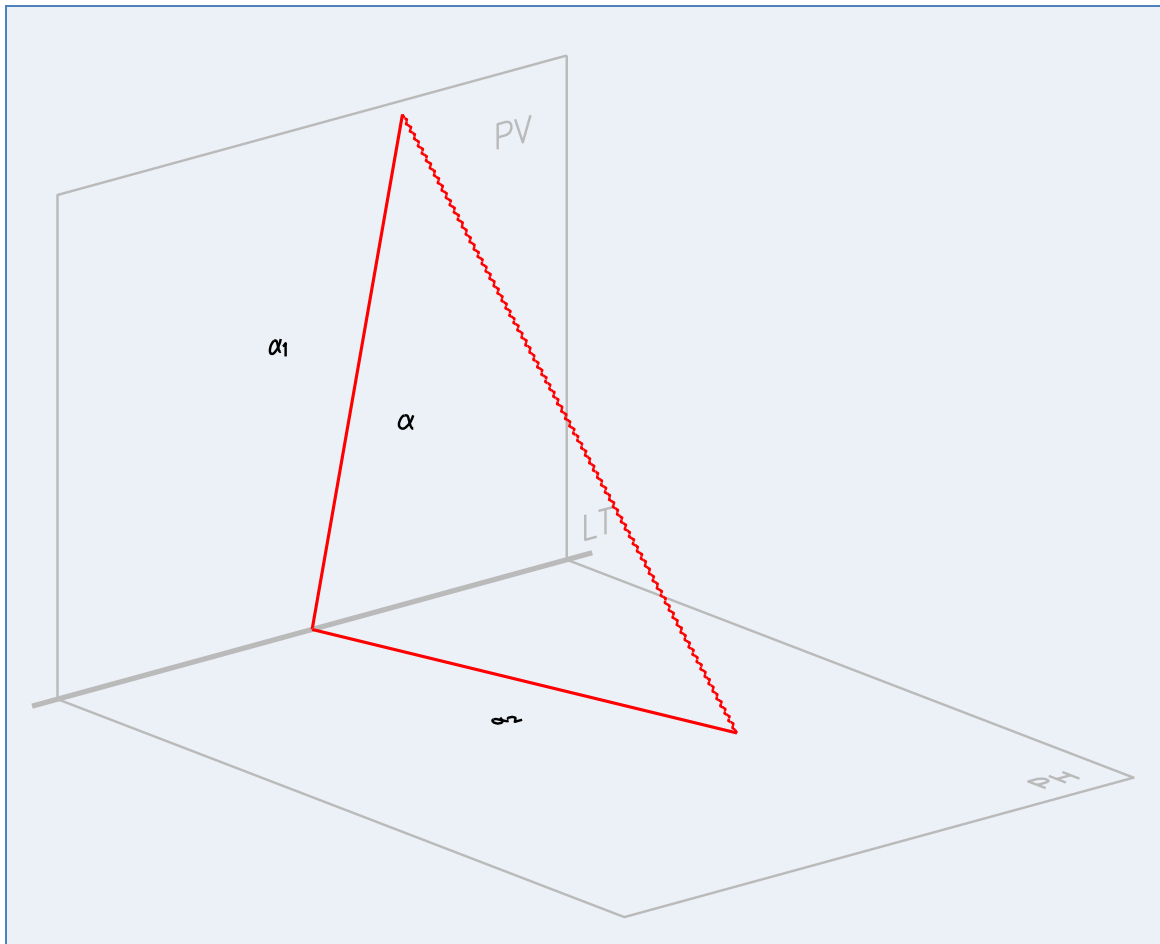
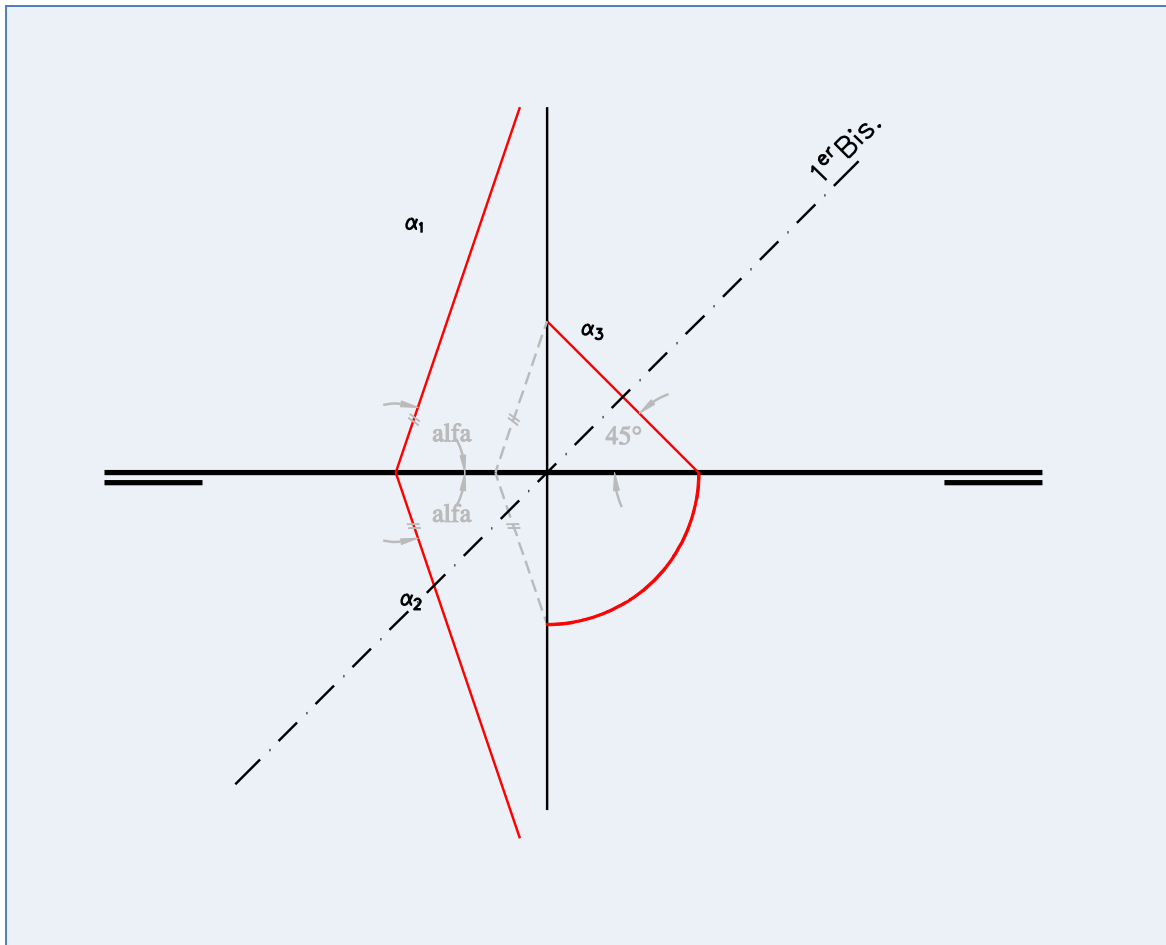


Figura 58. Plano perpendicular al primer bisector 3D



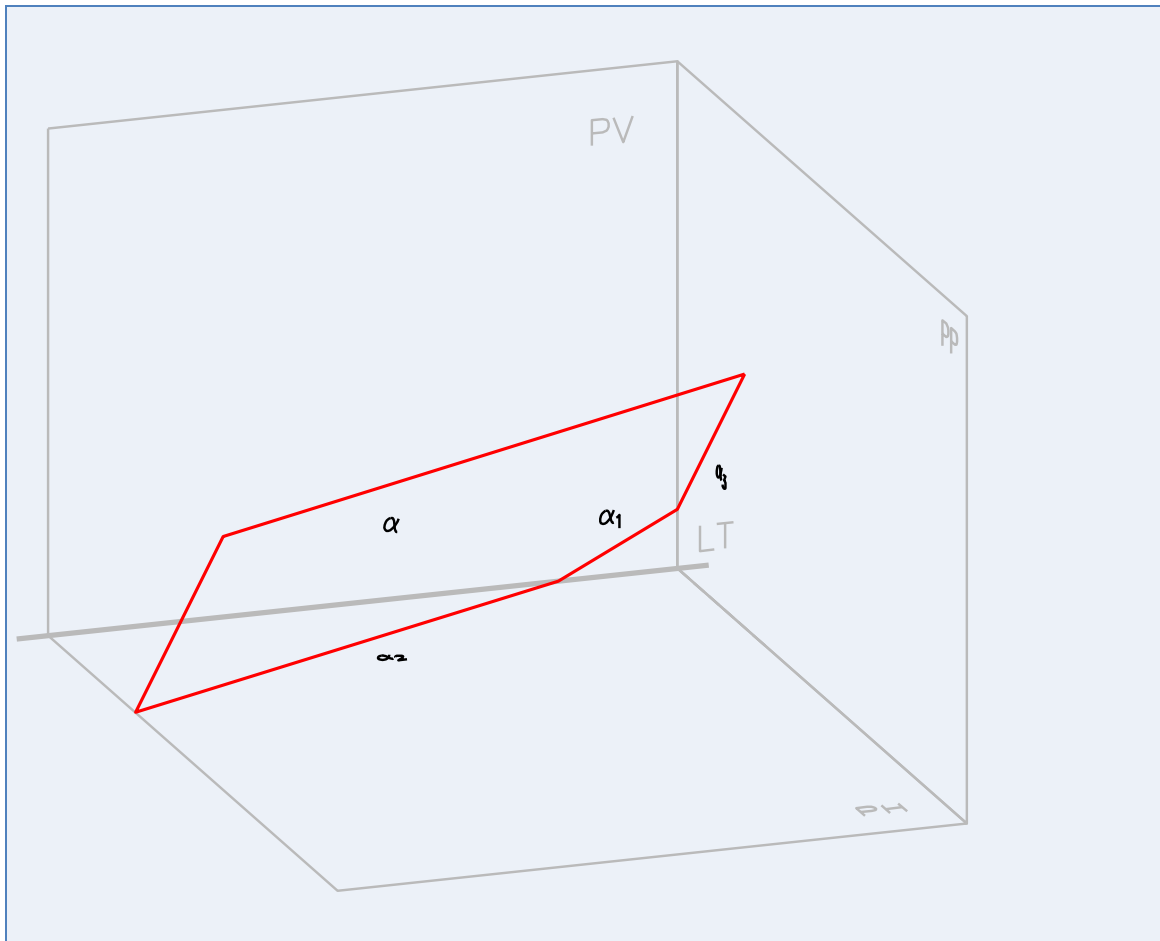
**Figura 59. Plano perpendicular al primer bisector**



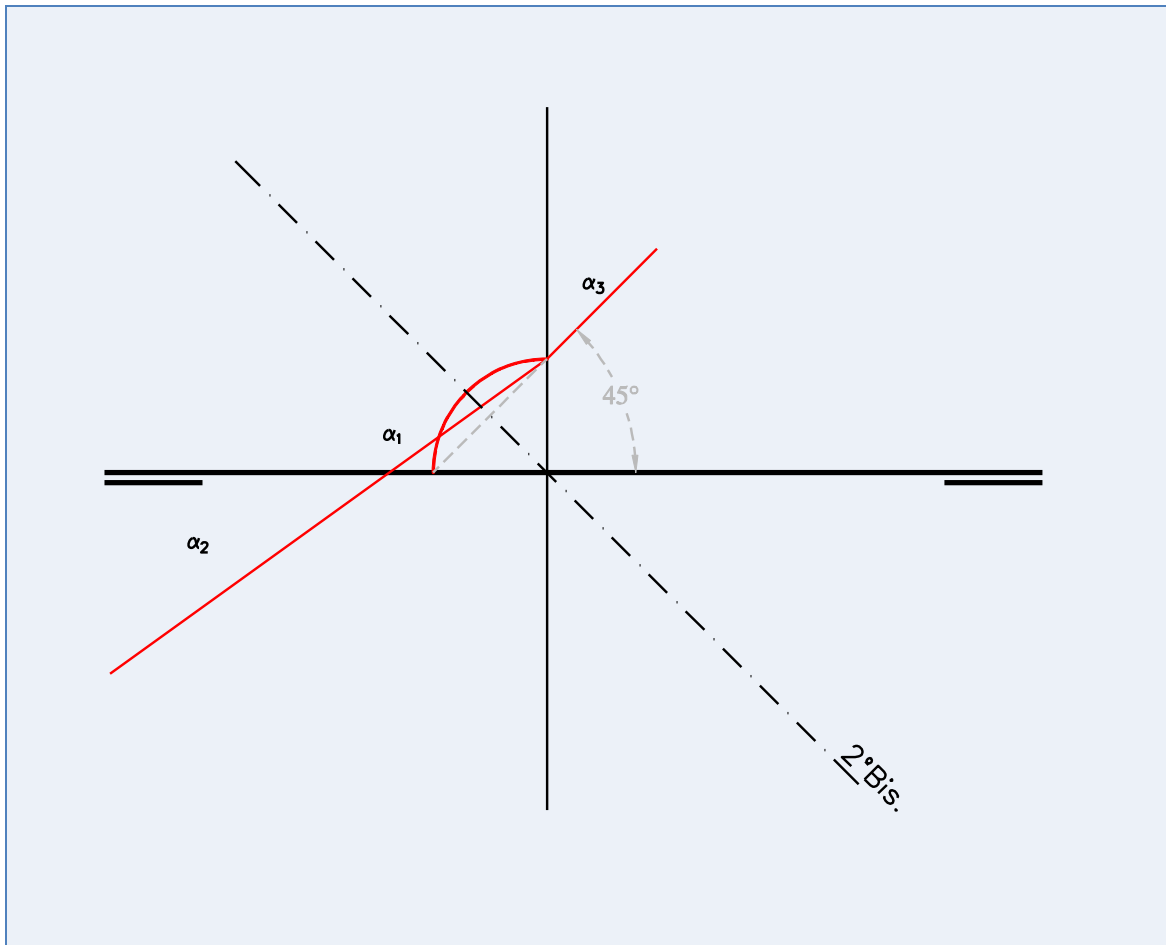
El plano

### 5.2.8. Plano perpendicular al segundo bisector

La traza  $\alpha_3$  formará un ángulo de  $45^\circ$ .



**Figura 60. Plano perpendicular al segundo bisector 3D**

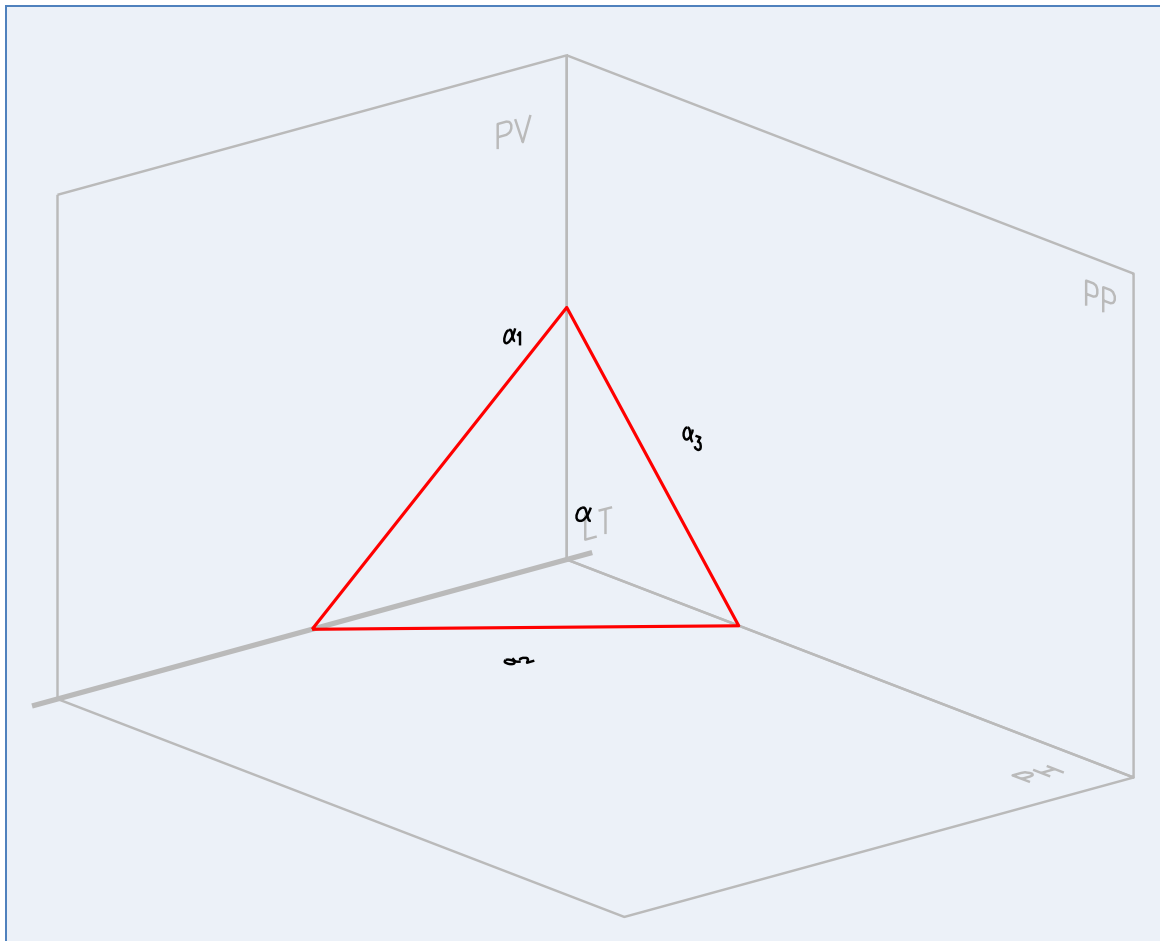


**Figura 61. Plano perpendicular al segundo bisector**

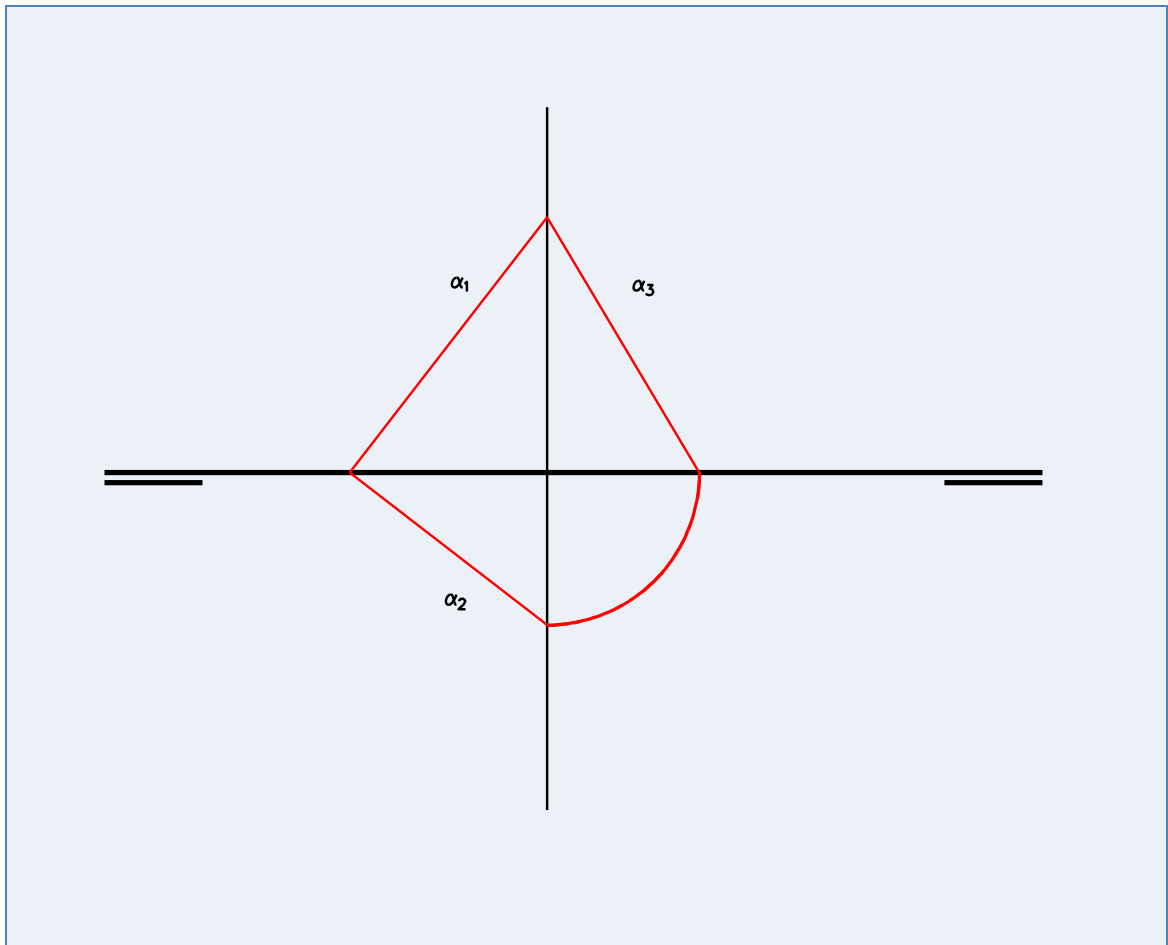
El plano

### 5.2.9. Plano de posición general u oblicua

Forma un ángulo cualquiera con los planos de proyección. Trazas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ .



**Figura 62. Plano en posición general oblicua 3D**



**Figura 63. Plano en posición general oblicua**

## 5.3. Rectas notables del plano

### 5.3.1. Recta horizontal

Es la recta horizontal que pertenece al plano. Su traza  $V$  está sobre la traza  $\alpha_1$  del plano y su proyección horizontal  $r_2$  es paralela a la traza  $\alpha_2$ .

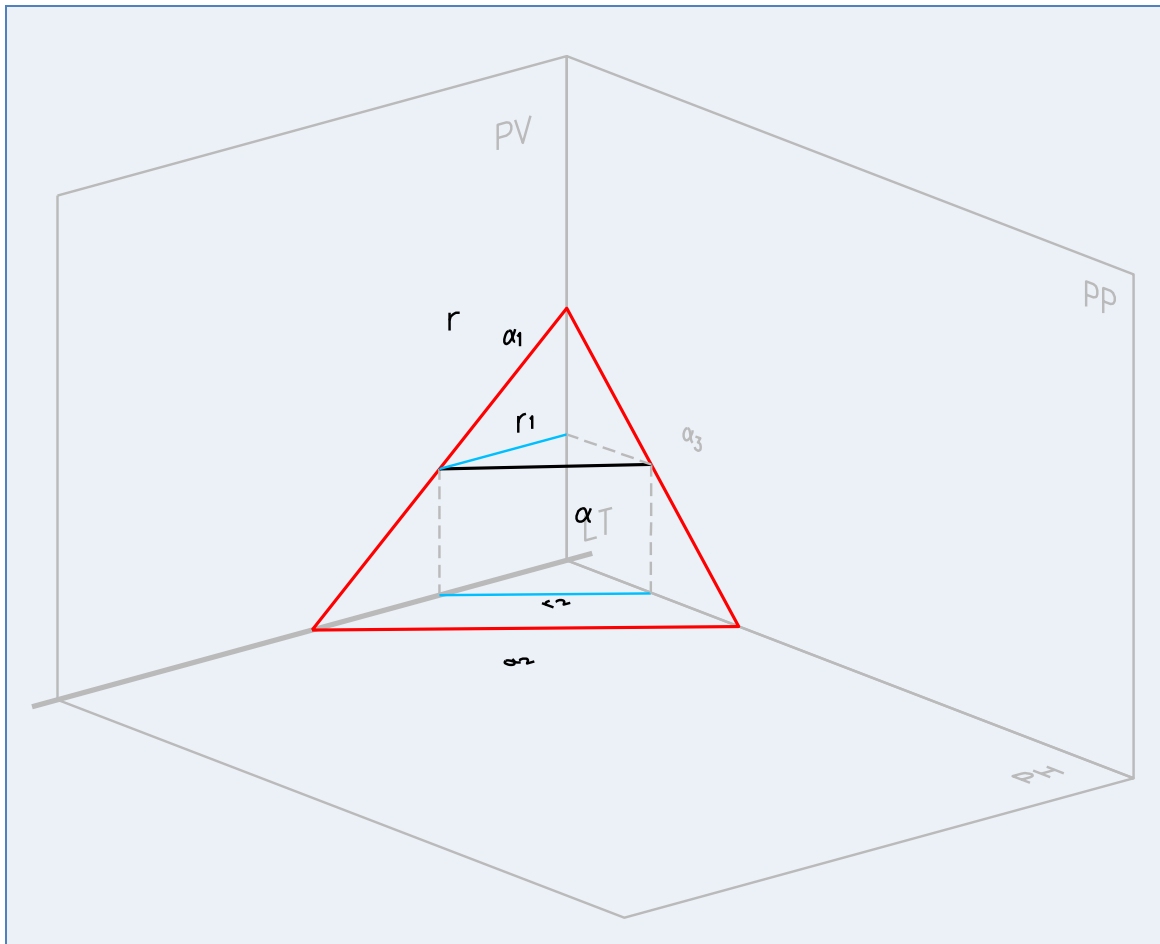
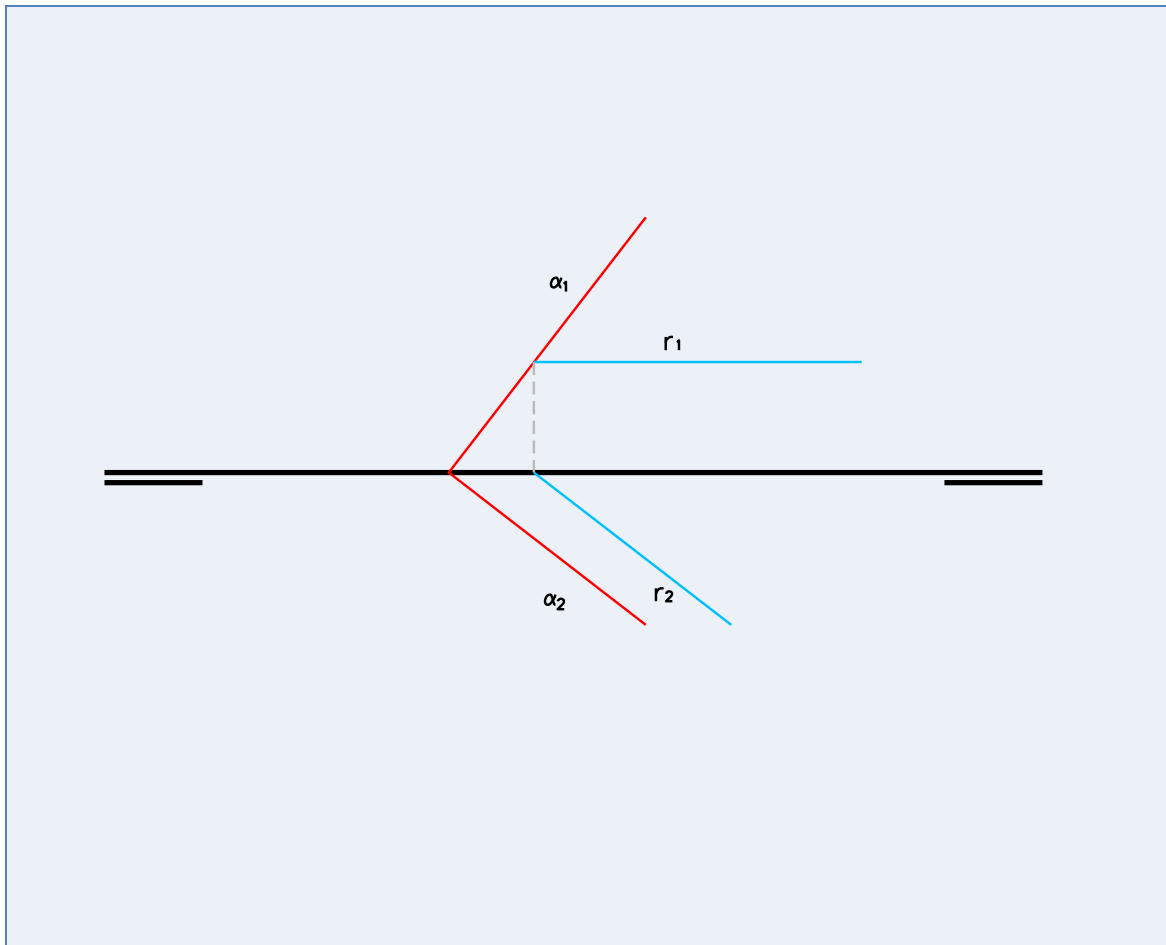


Figura 64. Recta horizontal del plano 3D



**Figura 65. Recta horizontal del plano**

El plano

### 5.3.2. Rectas frontales

Son las rectas frontales que pertenecen al plano. Su única traza  $\mathbf{H}$  pertenece a  $\alpha_2$  y la proyección  $\mathbf{r}_1$  es paralela a la traza vertical  $\alpha_1$  del plano.

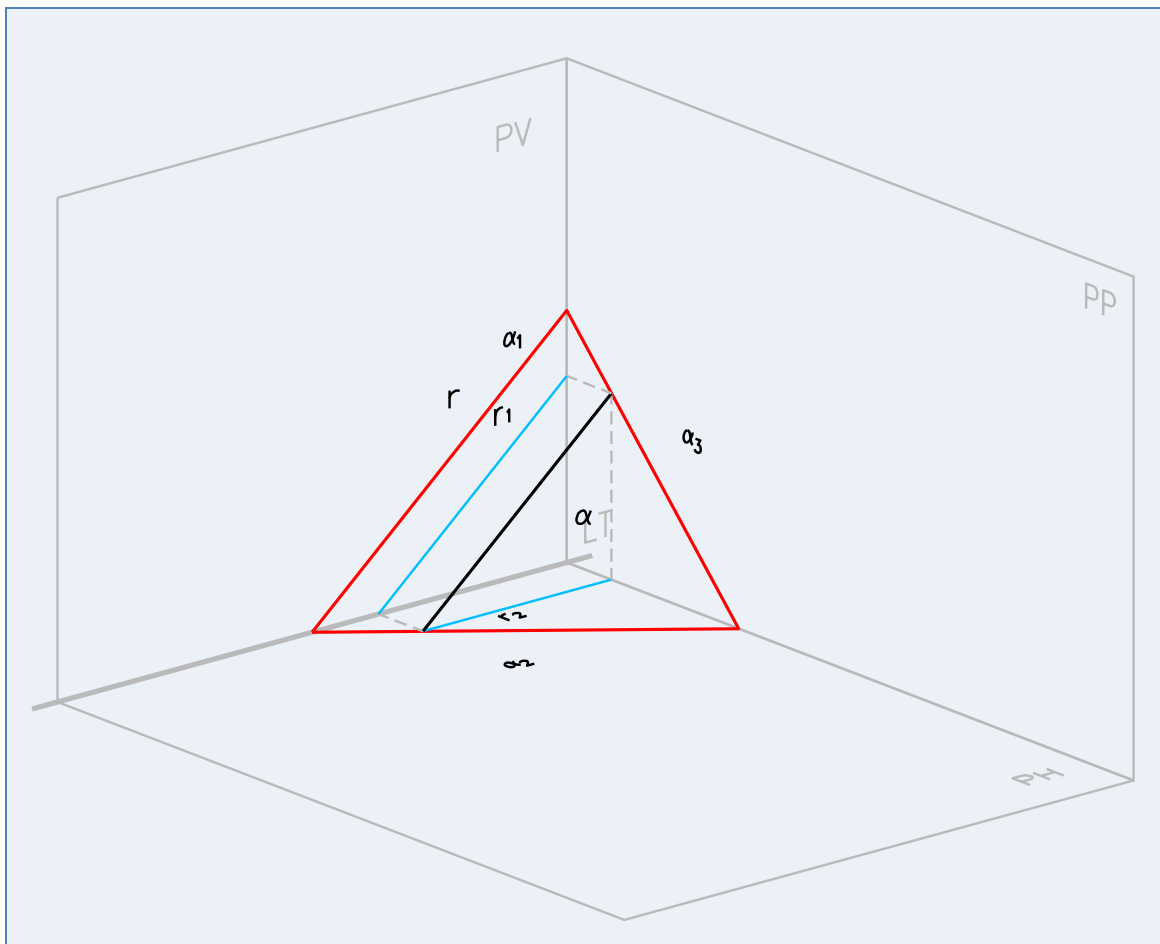
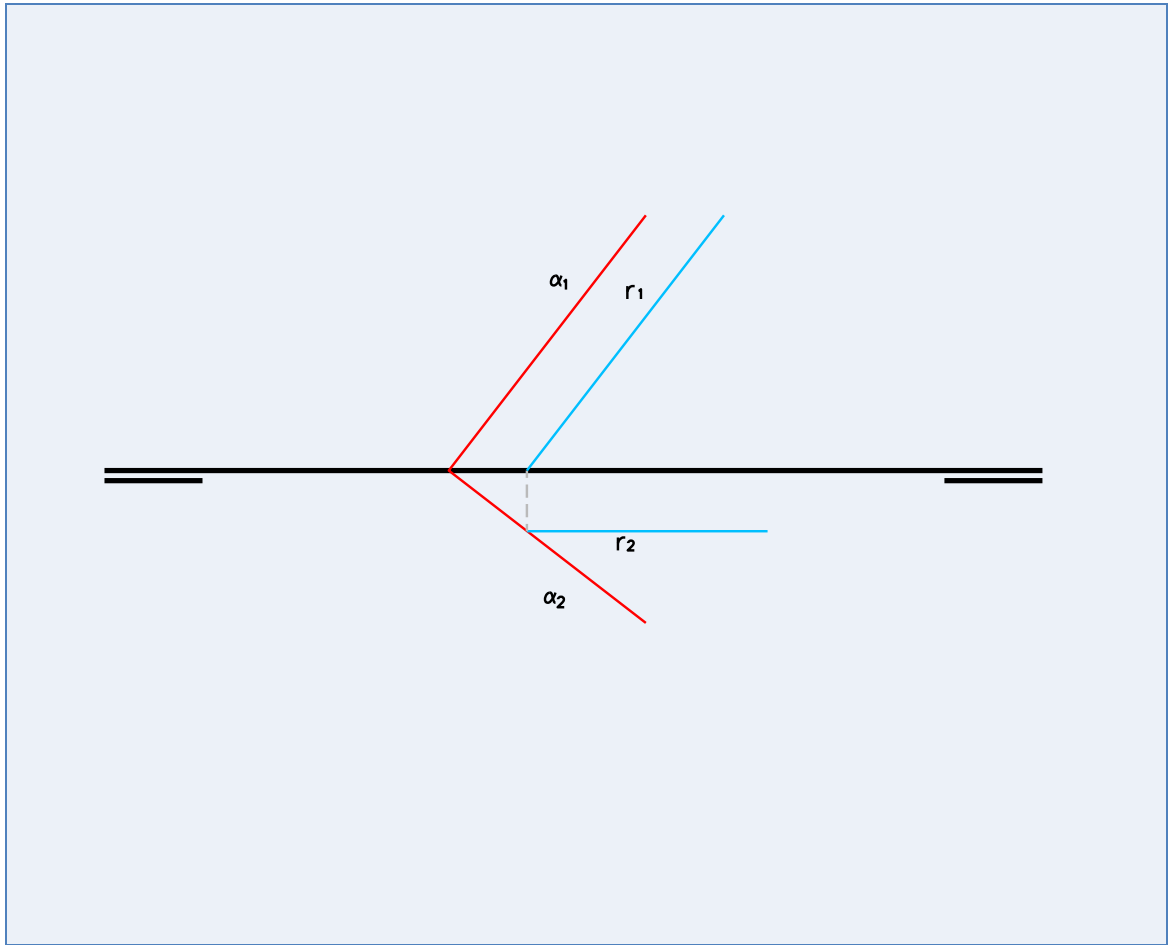


Figura 66. Recta frontal del plano 3D



**Figura 67. Recta frontal del plano**



5.3.3. Recta de máxima pendiente

Es la recta que perteneciendo al plano forma mayor ángulo con el plano horizontal,  $r$  ( $r_1$ ,  $r_2$ ). Así pues será aquella cuya proyección horizontal sea perpendicular a la traza horizontal del plano que la contiene  $\alpha_2$ , o de cualquier recta horizontal del plano.

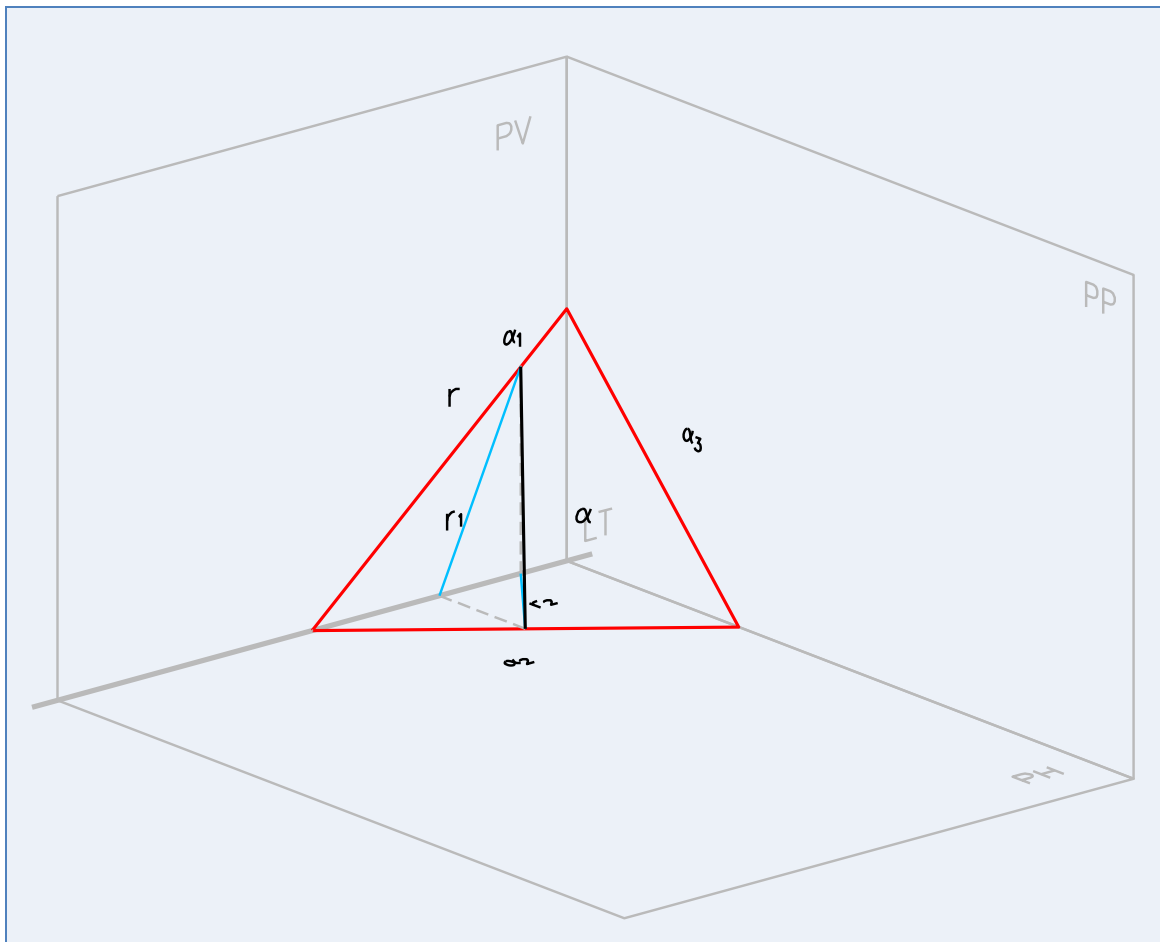


Figura 68. Recta de máxima pendiente 3D

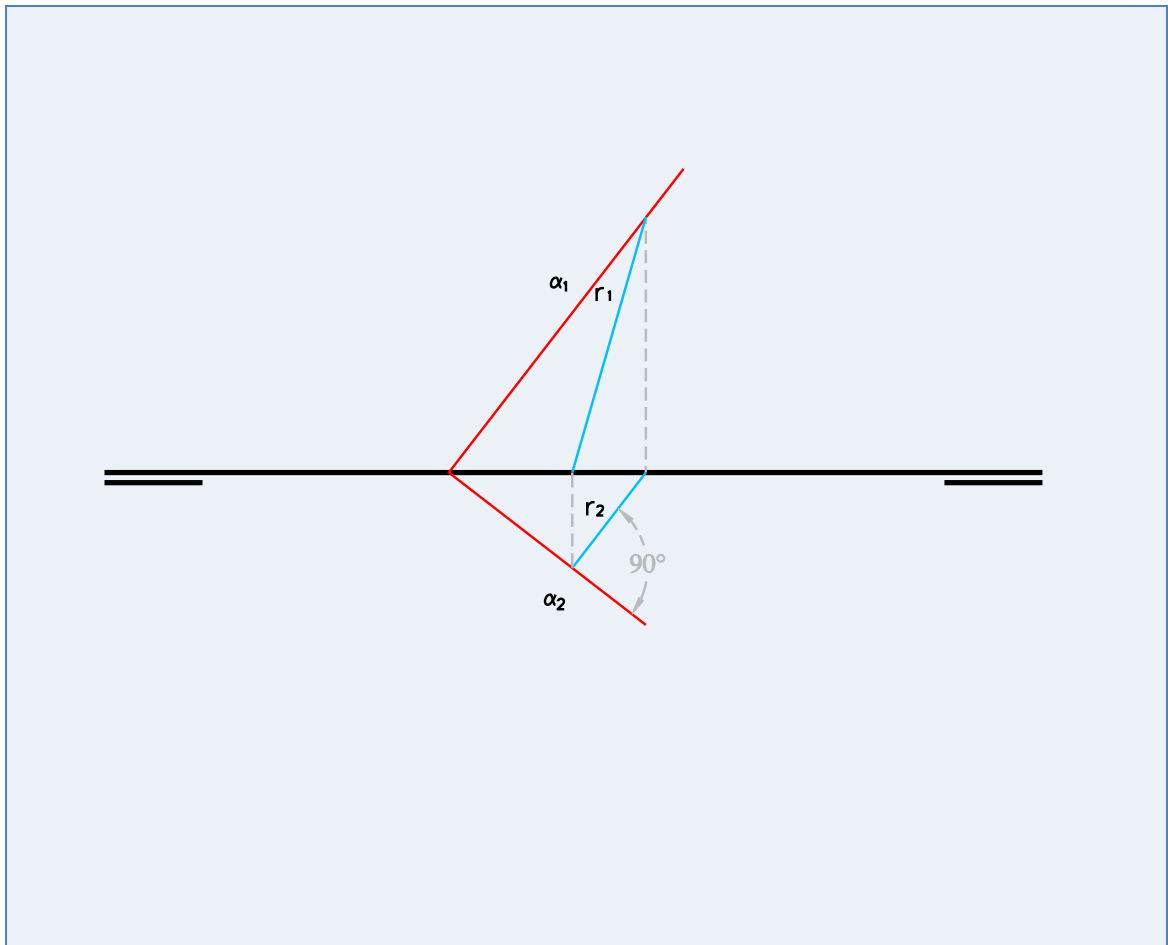


Figura 69. Recta de máxima pendiente

5.3.4. Recta de máxima inclinación

Es la recta del plano que forma mayor ángulo con el plano vertical,  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ). Así pues será aquella cuya proyección vertical sea perpendicular a la traza vertical del plano  $\alpha_1$  que la contiene o de cualquier recta frontal del plano.

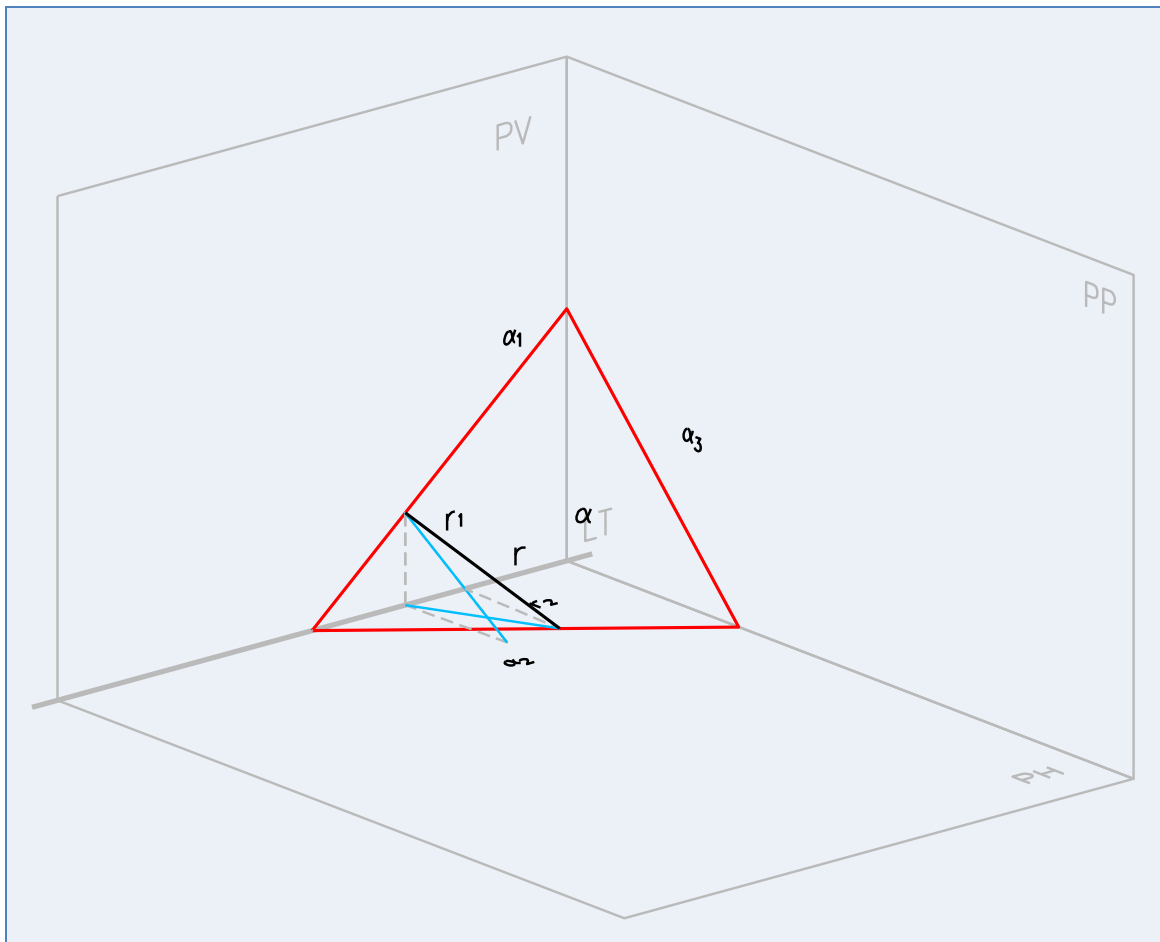
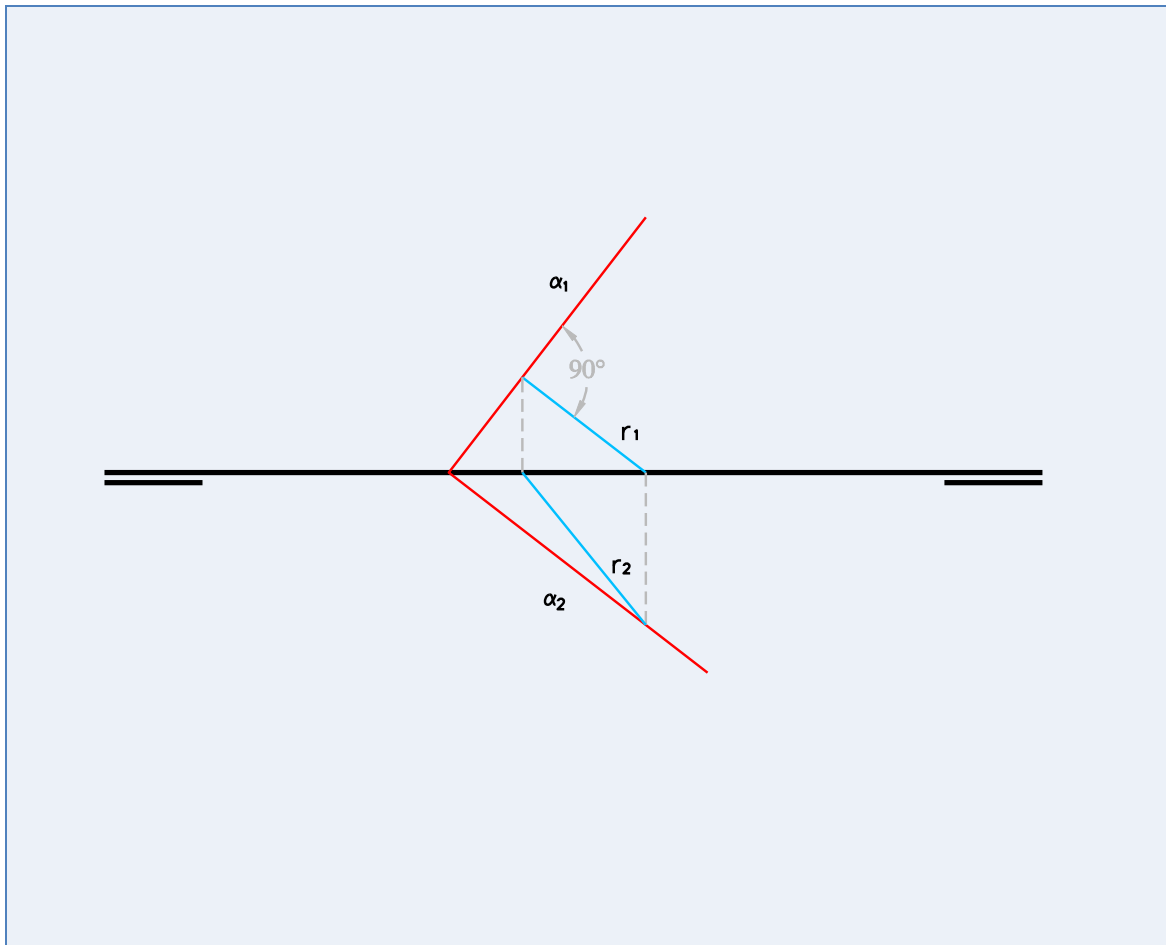


Figura 70. Recta de máxima inclinación 3D



**Figura 71. Recta de máxima inclinación**



# Tema 6

## Intersecciones

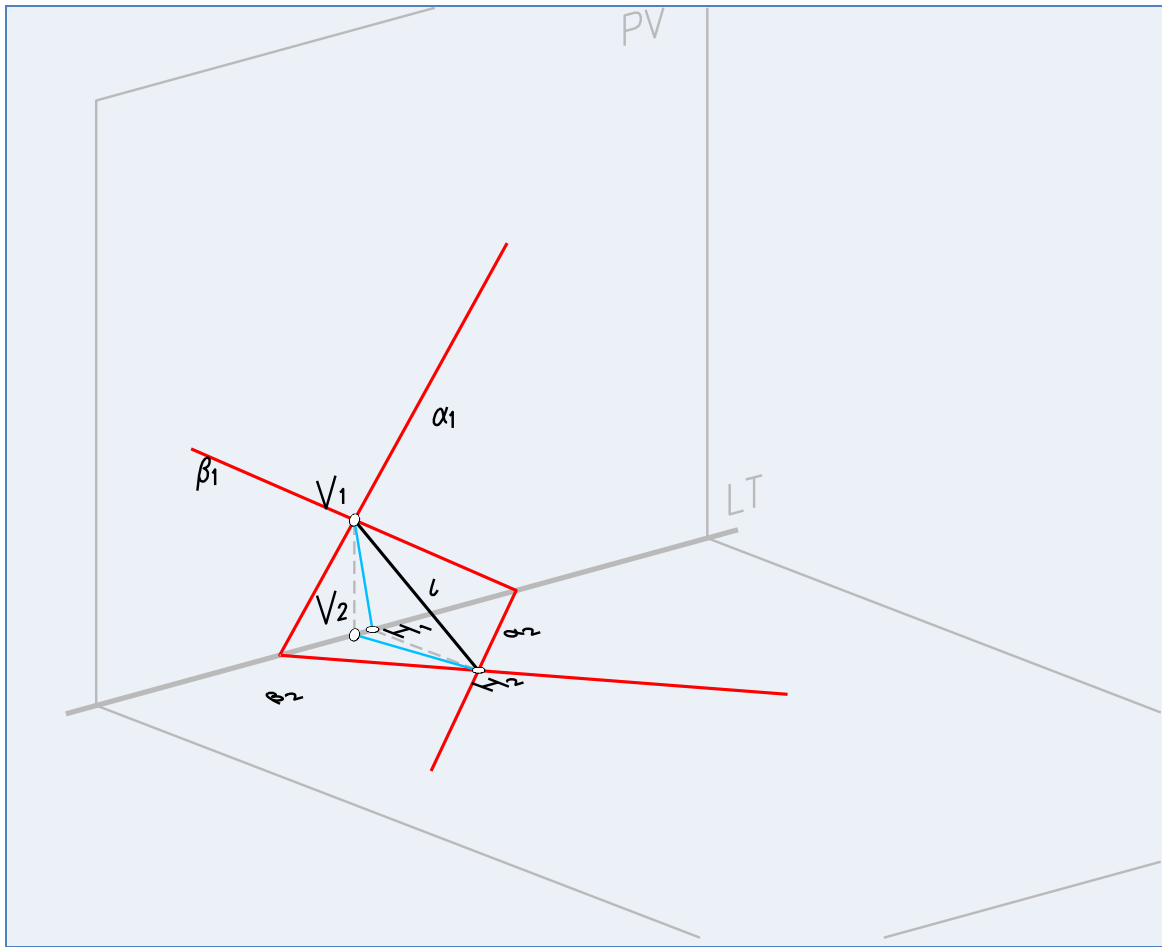
Las intersecciones entre figuras son uno de los puntos más importantes del sistema diédrico.

### 6.1. Intersecciones entre planos

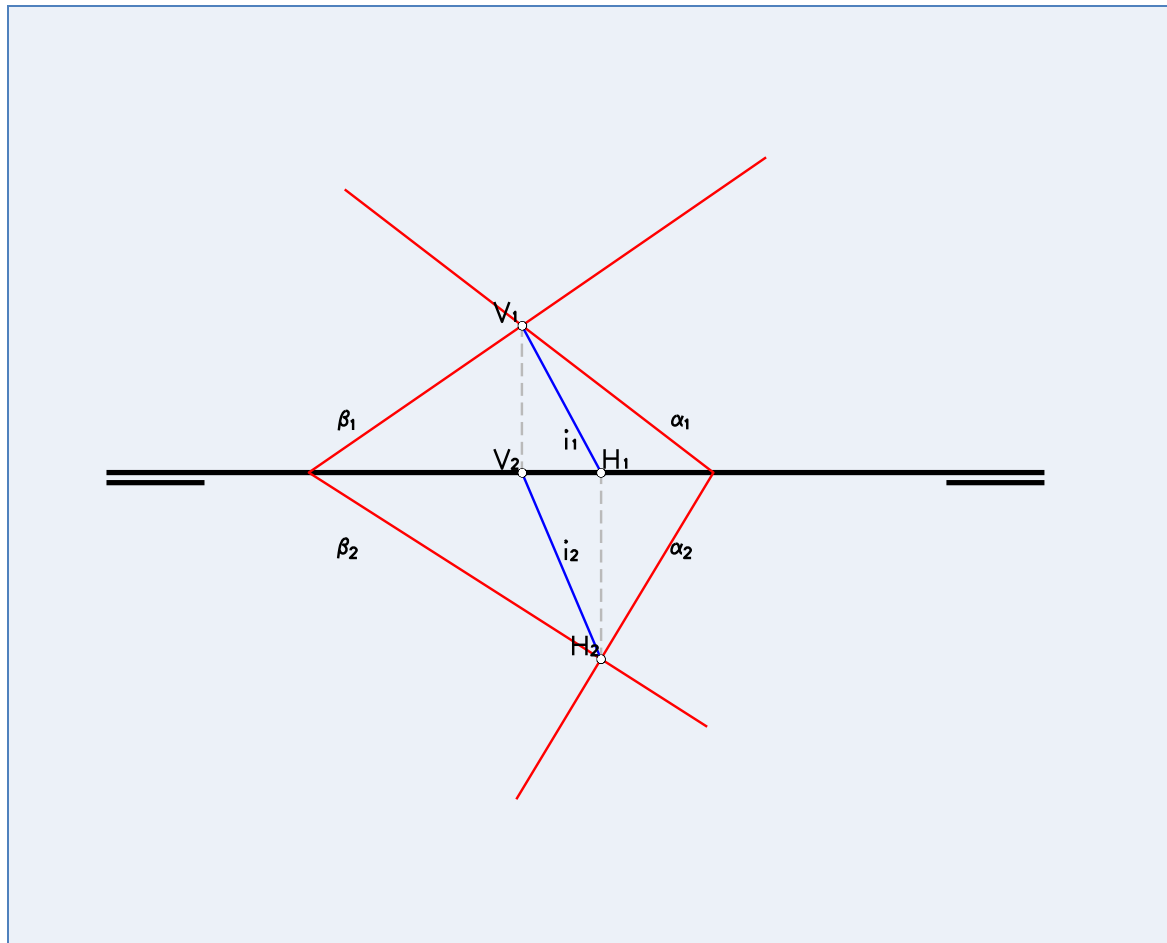
La intersección entre dos planos  $\alpha$  y  $\beta$  es una recta  $i$  común a ambos.

Para hallar los puntos que ambos planos tienen en común se utilizan planos auxiliares eligiéndolos preferentemente del siguiente orden:

- Los planos de proyección (pues no requiere el dibujo de ningún plano auxiliar)
- Planos paralelos a los de proyección (empleando para ello planos frontales y horizontales)
- Otro plano cualquiera



**Figura 72. Intersección entre dos planos 3D**



**Figura 73. Intersección entre dos planos**

Como metodología general primero se halla la traza  $\mathbf{H}_2$ , intersección entre  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , luego  $\mathbf{V}_1$ , intersección entre  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . Uniéndolas se obtiene la recta buscada.

En la figura descriptiva anterior, halladas las trazas  $\mathbf{H}_2$ , intersección entre  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , y  $\mathbf{V}_1$ , intersección entre  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , basta con encontrar las proyecciones  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  mediante perpendiculares hasta la línea de tierra  $\mathbf{LT}$ . Tras unir  $\mathbf{H}_2$  y  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{H}_1$  y  $\mathbf{V}_1$  quedarán determinadas las proyecciones  $\mathbf{i}_1$  y  $\mathbf{i}_2$ , proyecciones de la recta  $\mathbf{i}$  de intersección.

#### 6.1.1. Caso particular: Planos que se cortan fuera de los límites del papel

Dados los planos  $\alpha$  y  $\beta$  hallar la intersección  $\mathbf{i}$ . Si se cortan las trazas horizontales  $\alpha_2$  y  $\beta_2$ , se utiliza un plano horizontal que determina las rectas horizontales de intersección  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ . Donde se cortan las rectas paralelas que pasan por  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{B}_1$  se obtiene el punto  $\mathbf{C}_1$ , proyectando éste en forma perpendicular a la línea de tierra hasta cortar el plano auxiliar horizontal anterior, se halla  $\mathbf{C}_2$ . Finalmente se une este punto con el punto de intersección de las trazas horizontales de los planos y se obtiene la recta  $\mathbf{i}$  ( $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ ).



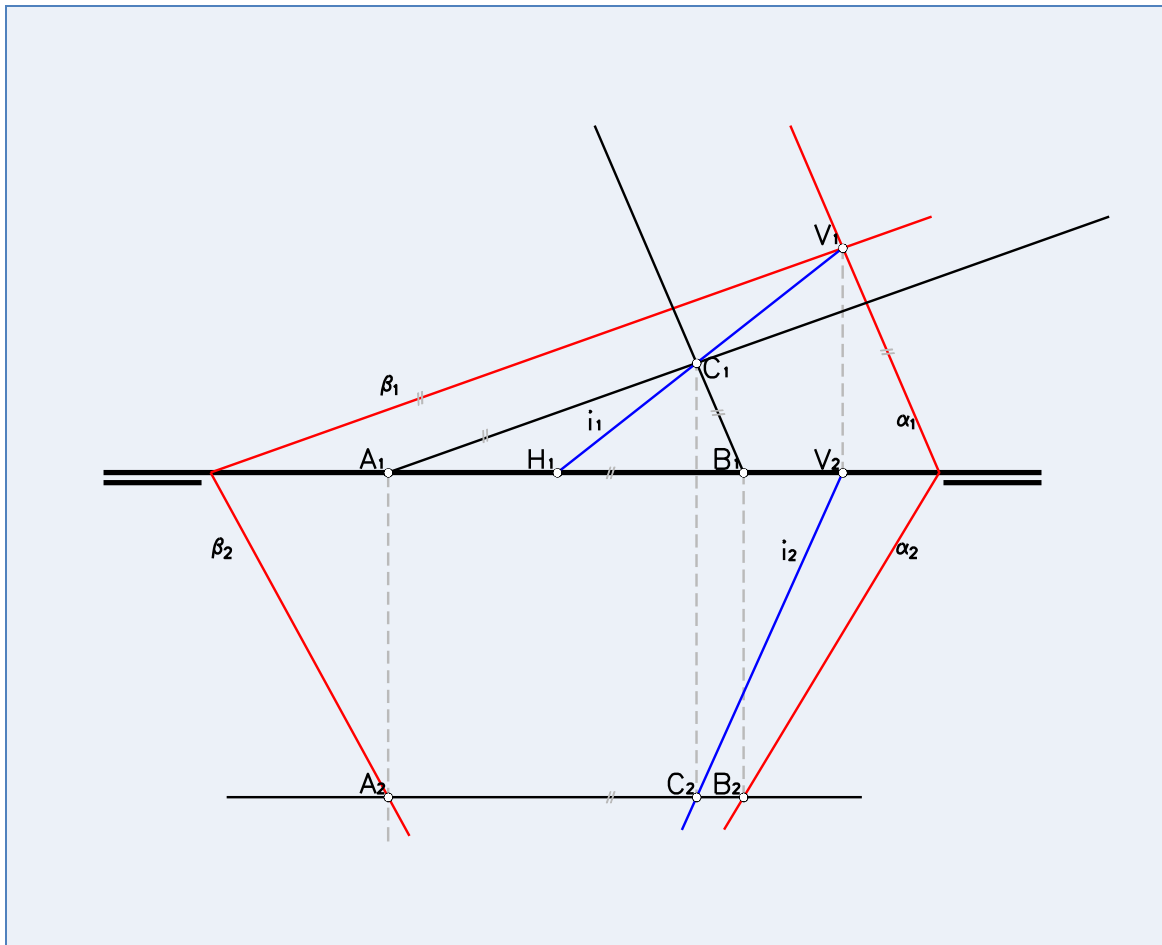


Figura 74. Planos que se cortan fuera del papel. Ejemplo 1

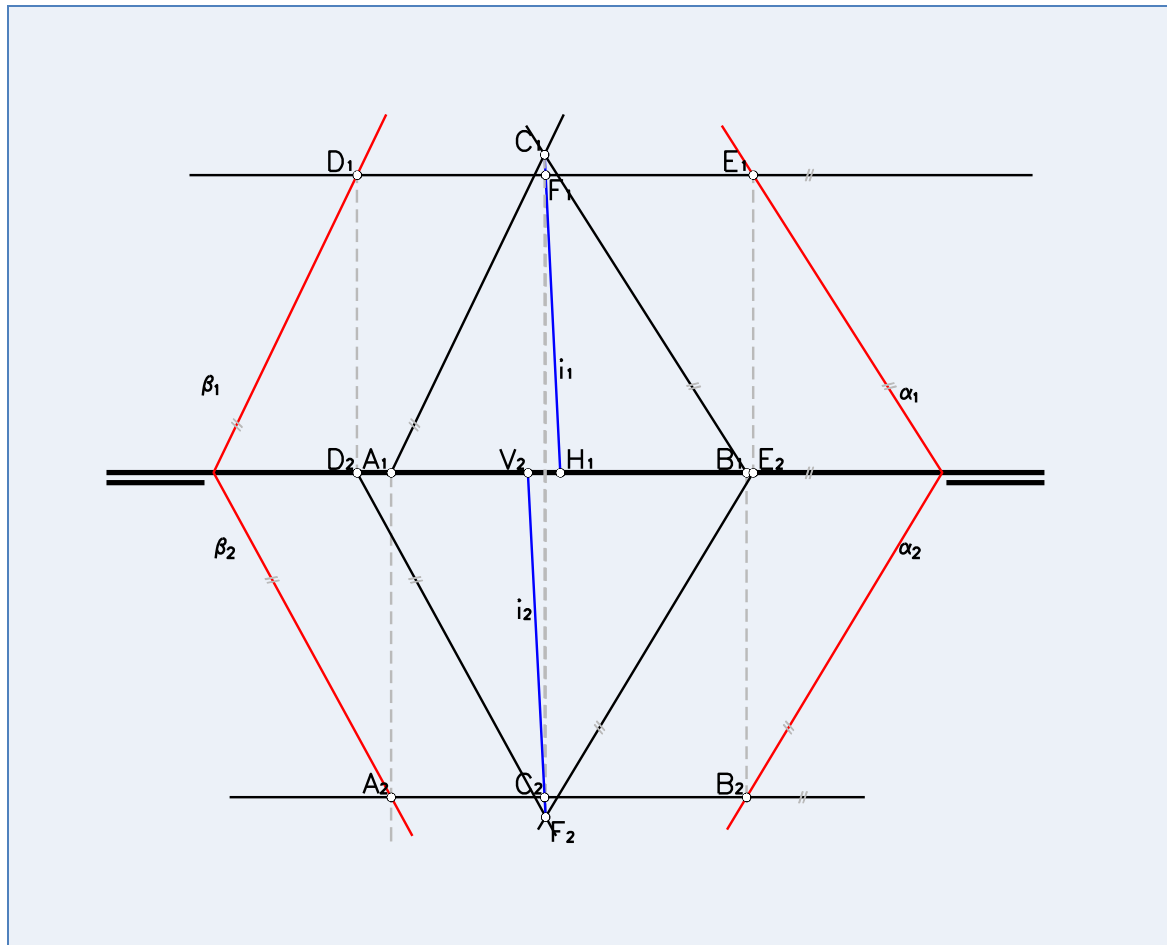


Figura 75. Planos que se cortan fuera del papel. Ejemplo 2

6.1.2. Planos dados por tres puntos no alineados y cuatro puntos no alineados

Dados los planos **ABC** y **DEFG**, hallar la recta de intersección **i**. En este caso se utilizan dos planos auxiliares:  $\alpha$  (**horizontal**) y  $\beta$  (**frontal**).

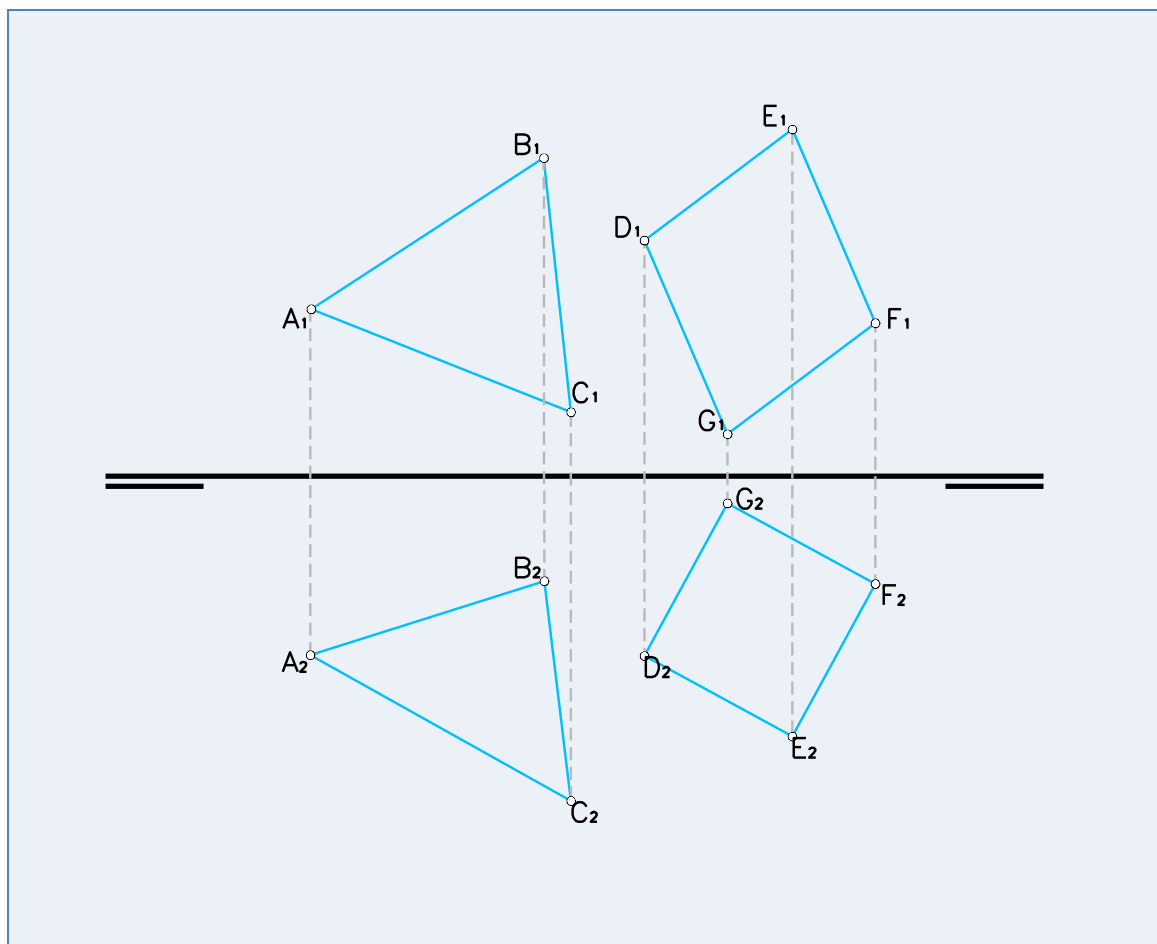


Figura 76. Enunciado de intersección de planos dados por puntos

El plano  $\alpha_1$  determina las rectas de intersección **1 – 2** en **ABC** y **3 – 4** en **DEFG**, cuyo punto común es **M** ( $M_1, M_2$ ). El plano  $\beta_2$  determina las rectas de intersección **5 – 6** en **ABC** y **7 – 8** en **DEFG**, cuyo punto común es **N** ( $N_1, N_2$ ).

Uniendo **M** y **N** se halla la recta de intersección **i**.

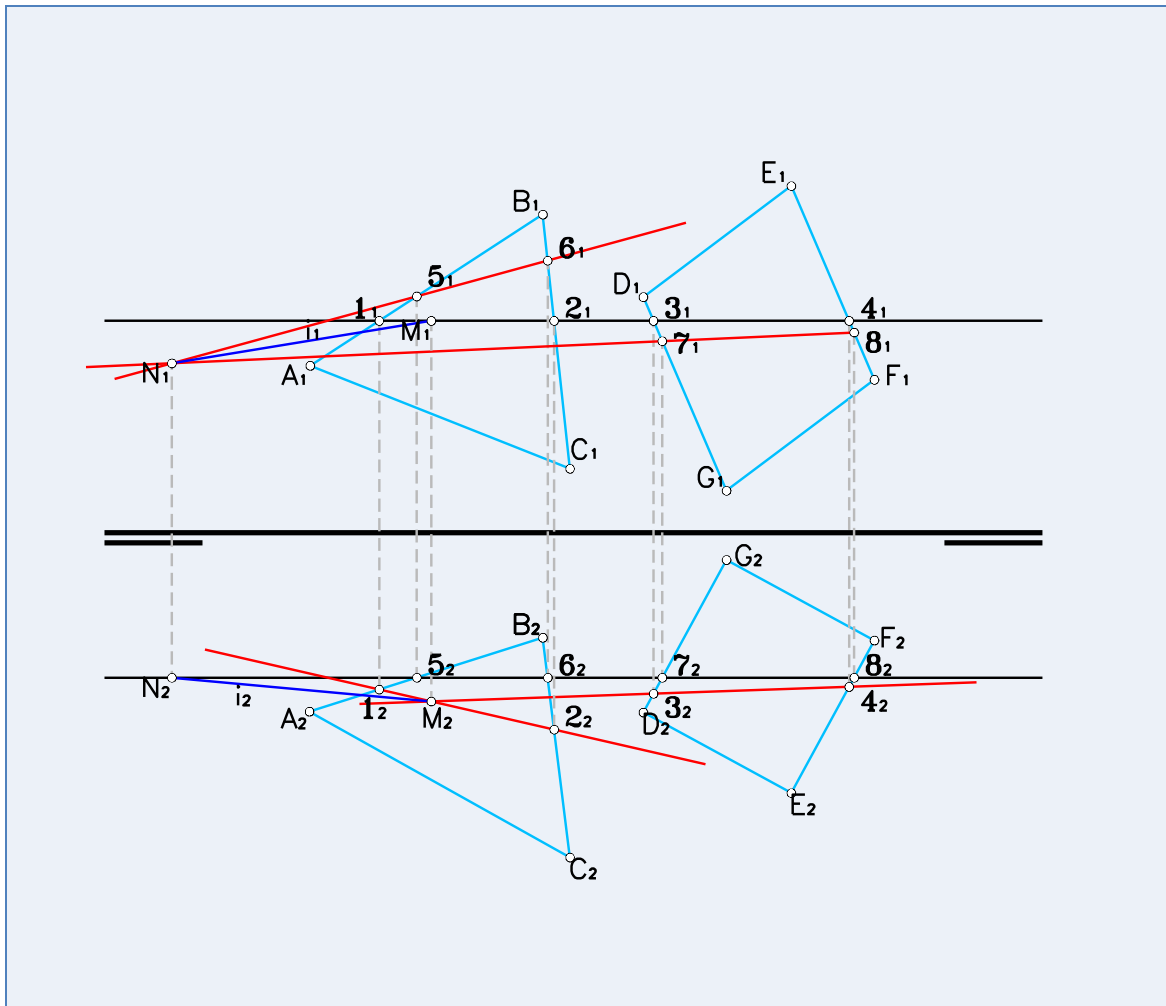


Figura 77. Intersección de planos dados por puntos

6.1.2.1. Intersección de dos planos proyectantes

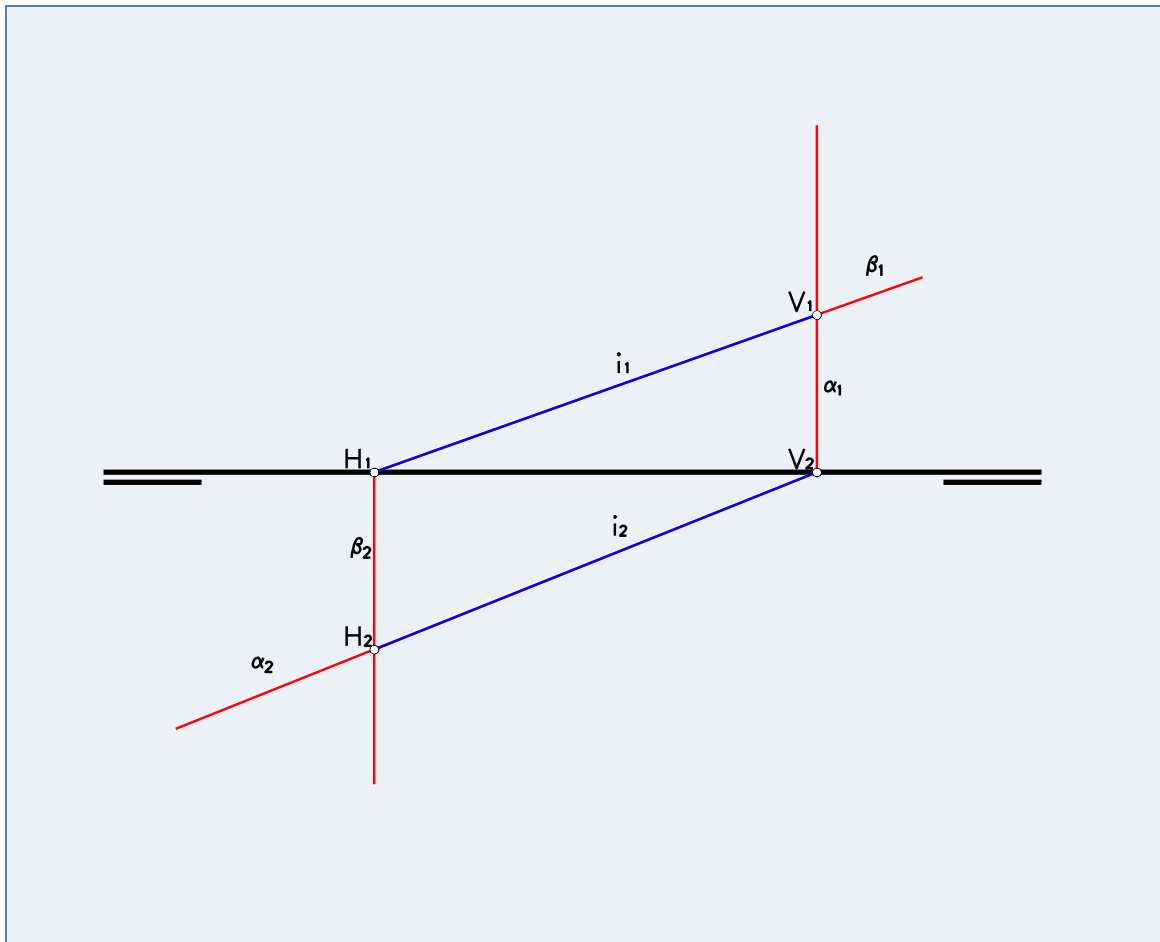
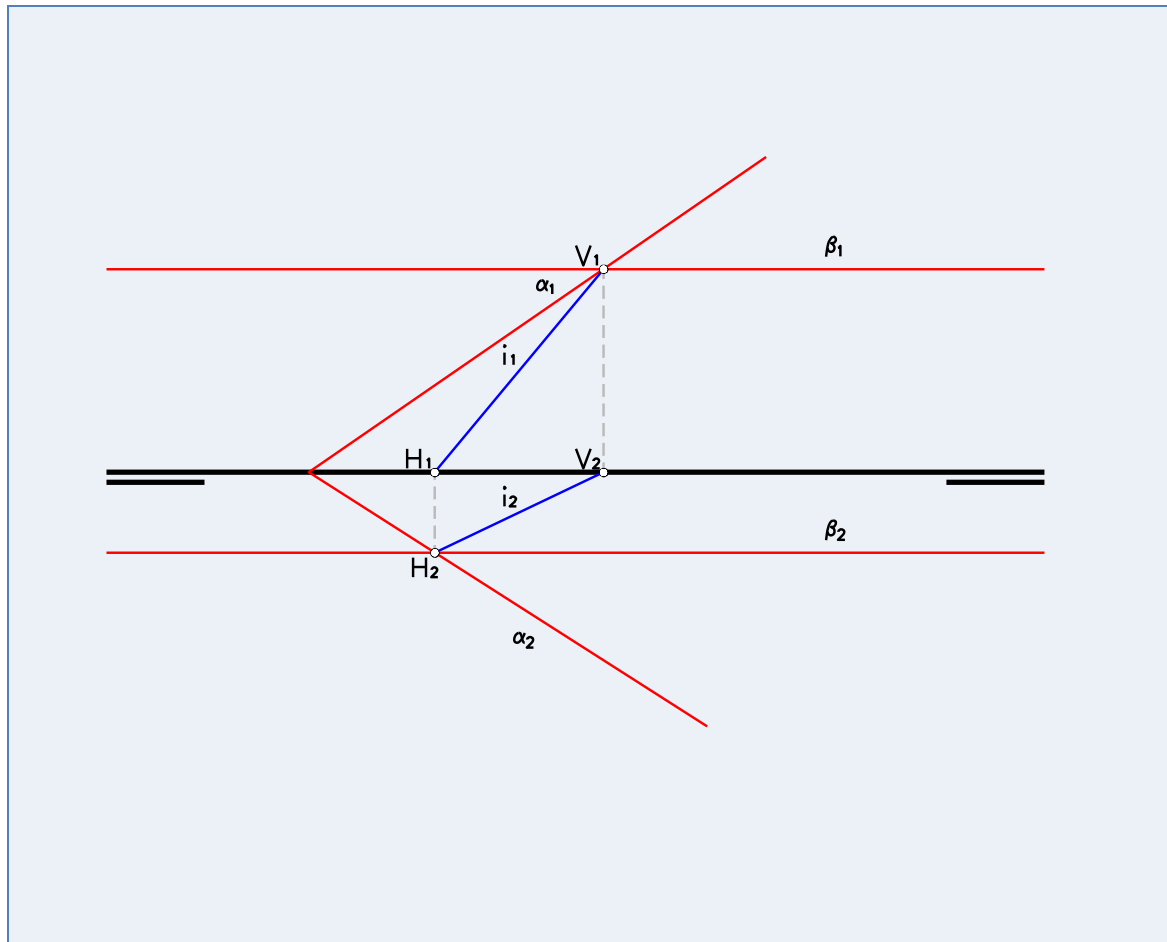


Figura 78. Intersección de dos planos proyectantes

## 6.1.2.2. Intersección de un plano paralelo a LT con otro cualquiera

**Figura 79. Intersección de un plano paralelo a LT con otro cualquiera**

6.1.2.3. Intersección de un plano de perfil con un plano cualquiera

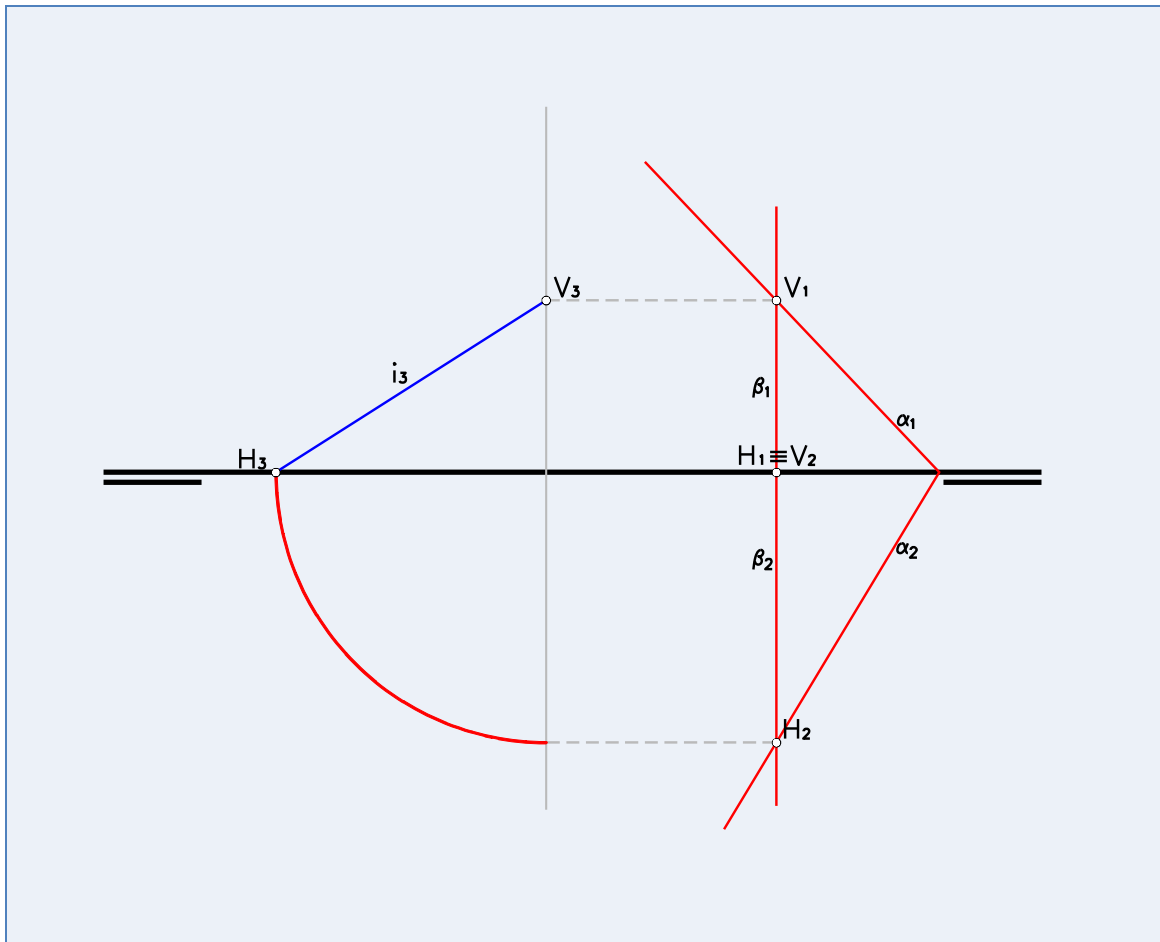
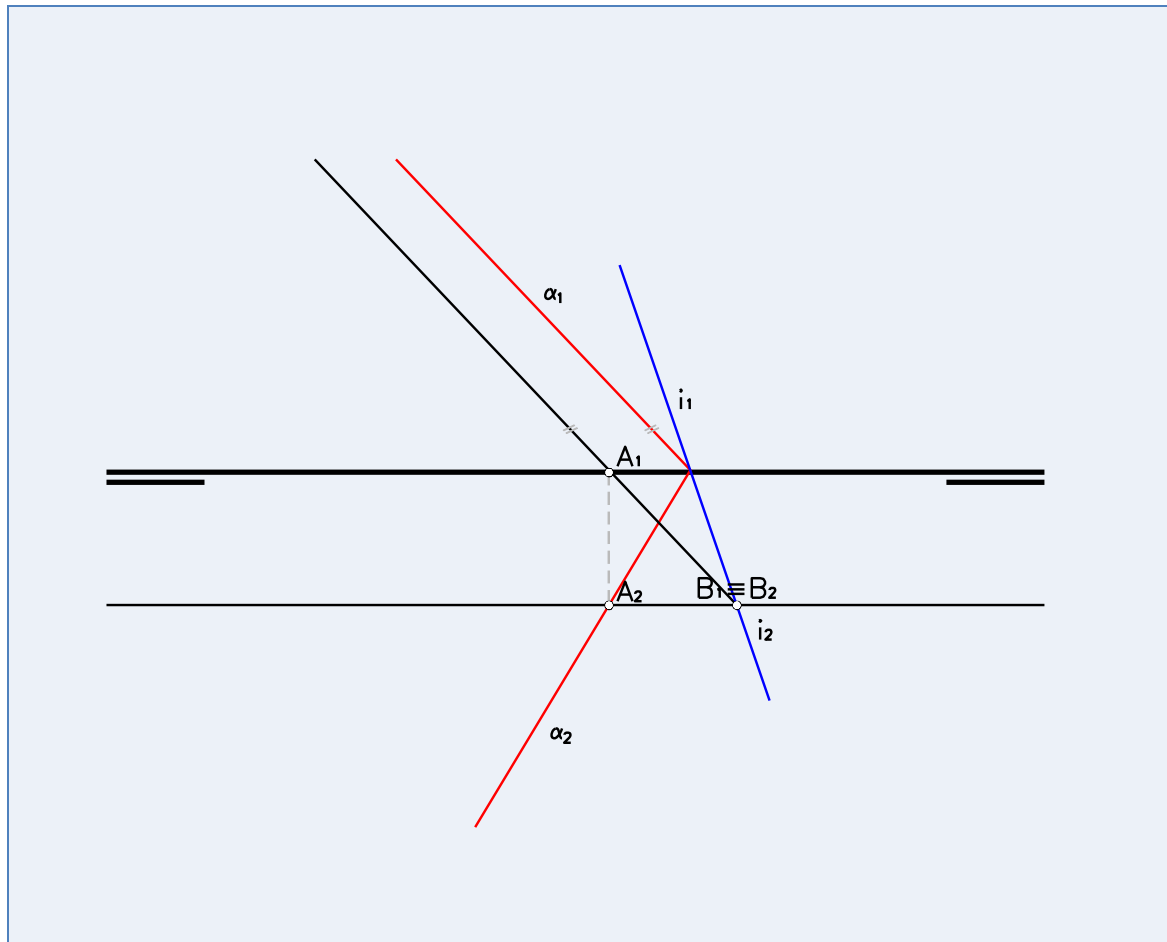


Figura 80. Intersección de un plano de perfil con un plano cualquiera

## 6.1.2.4. Intersección del segundo bisector con un plano cualquiera

**Figura 81. Intersección del segundo bisector con un plano cualquiera**



6.1.2.5. Intersección de dos planos fuera del primer cuadrante

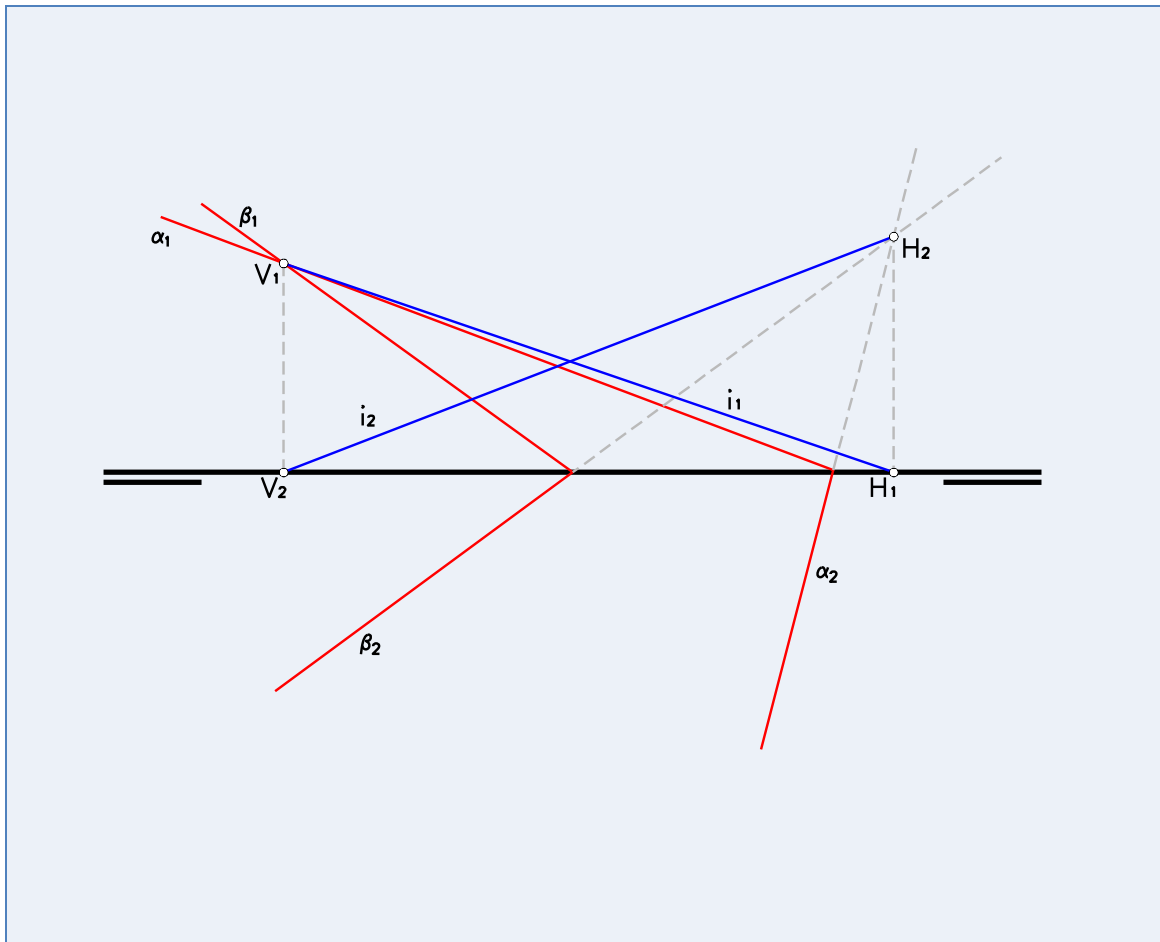
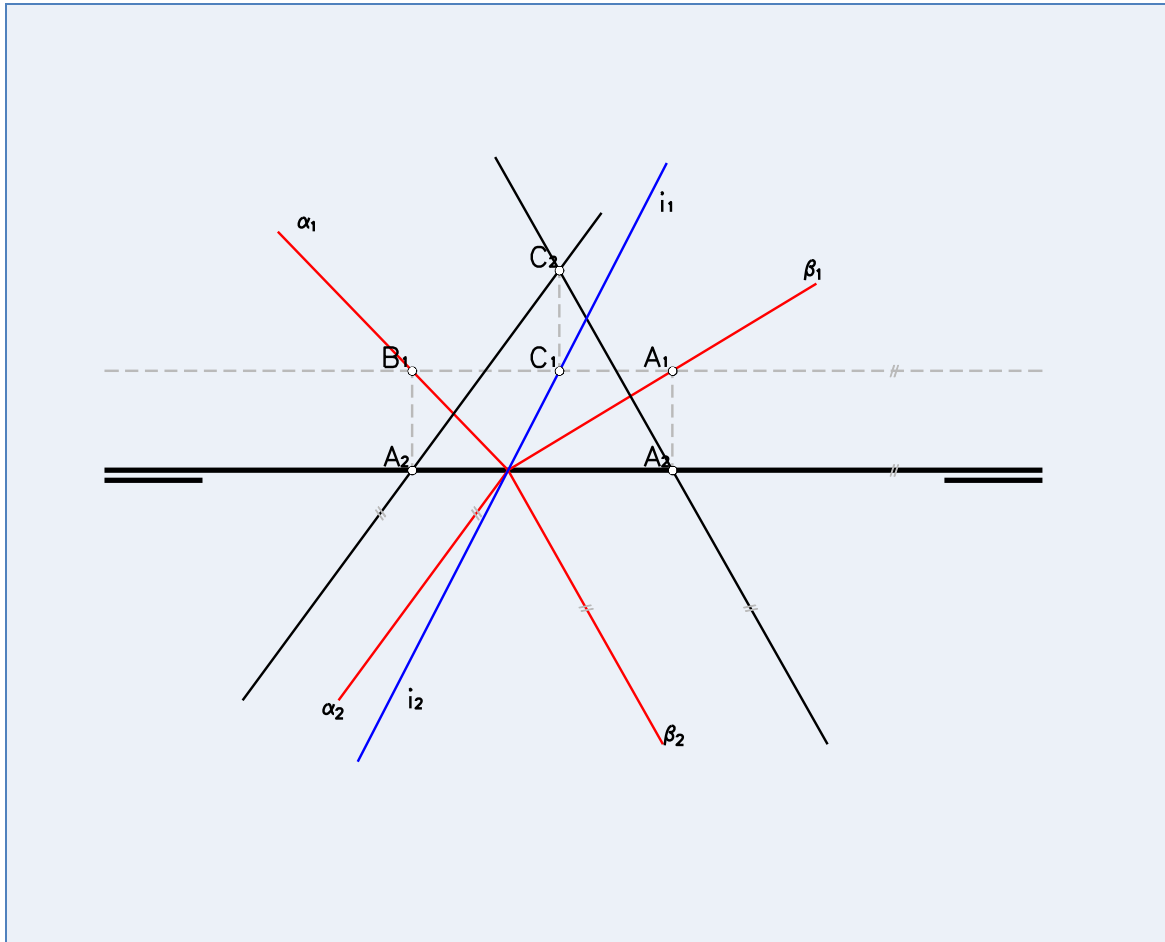


Figura 82. Intersección de dos planos fuera del primer cuadrante

## 6.1.2.6. Intersección de dos planos que pasan por el mismo punto de la LT



**Figura 83.** Intersección de dos planos que pasan por el mismo punto de la LT

6.1.2.7. Intersección de dos planos paralelos a la LT

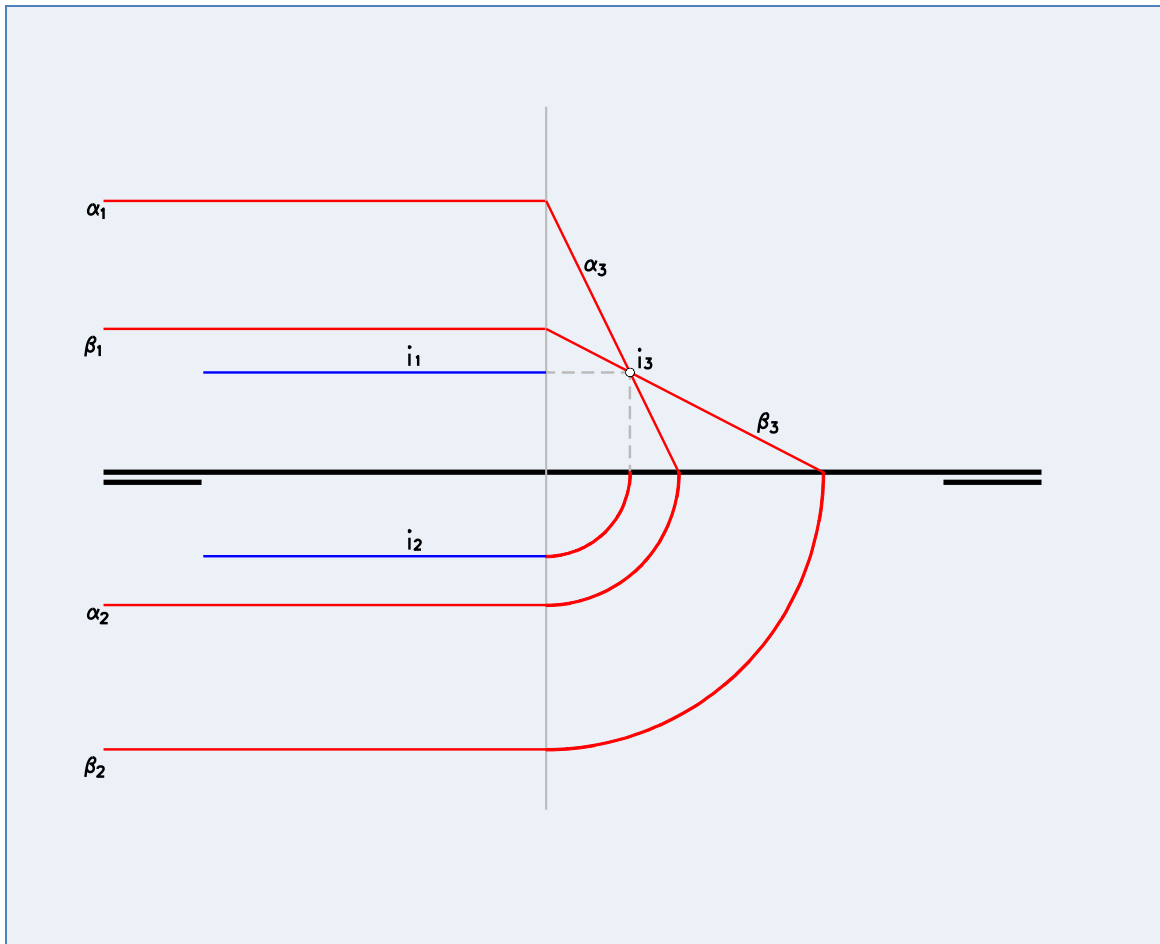
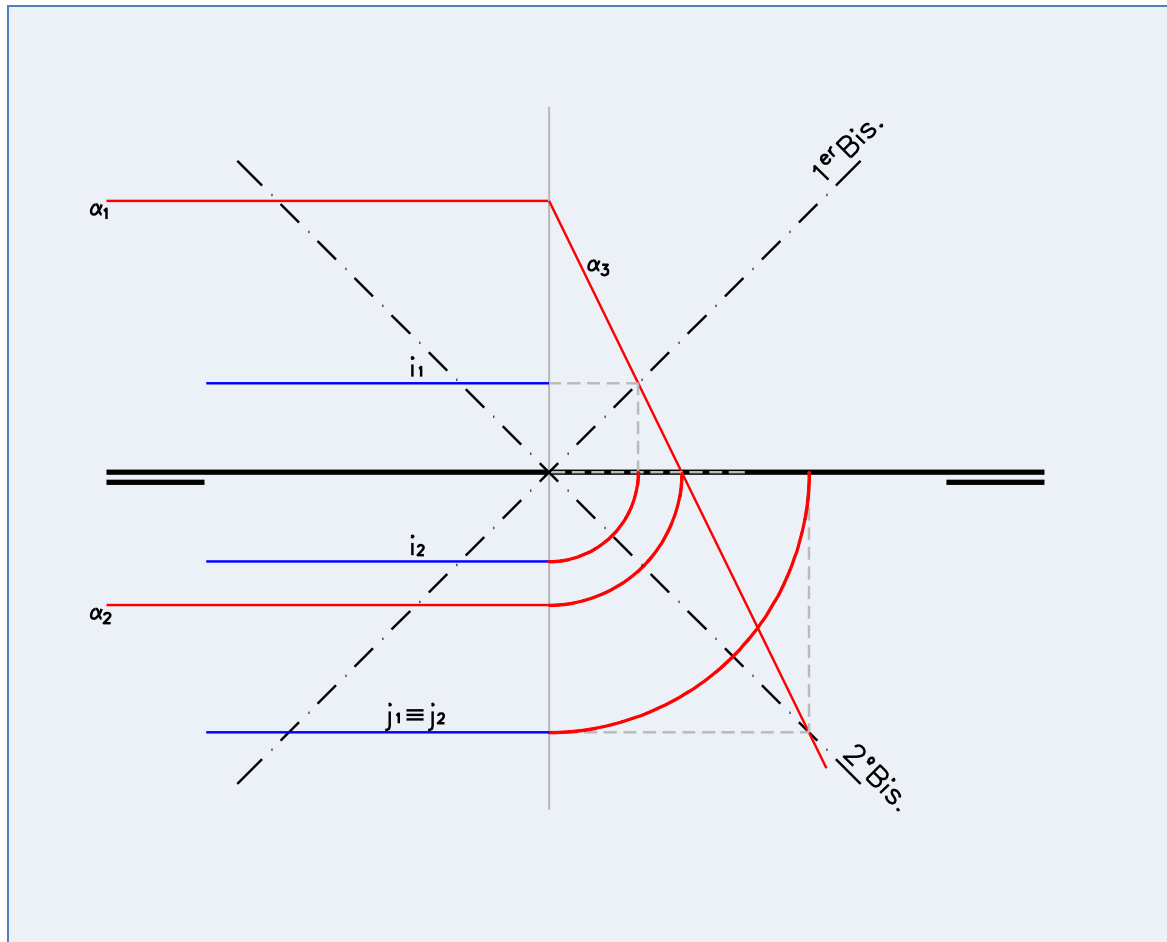


Figura 84. Intersección de dos planos paralelos a la LT

6.1.2.8. Intersección de un plano paralelo a **LT** con el primer y segundo bisector

**Figura 85.** Intersección de un plano paralelo a la LT con el primer y segundo bisector

6.1.2.9. Intersección de dos planos con trazas homónimas paralelas

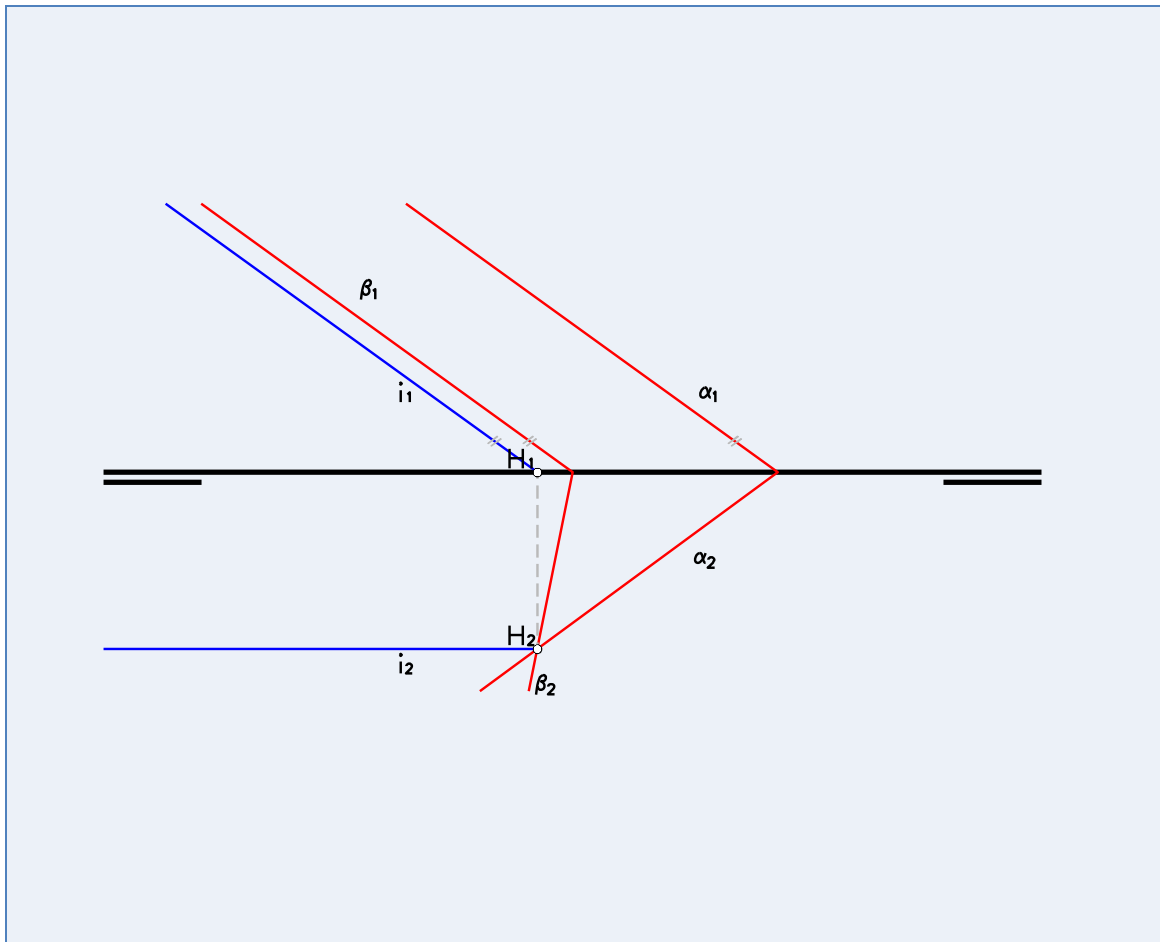
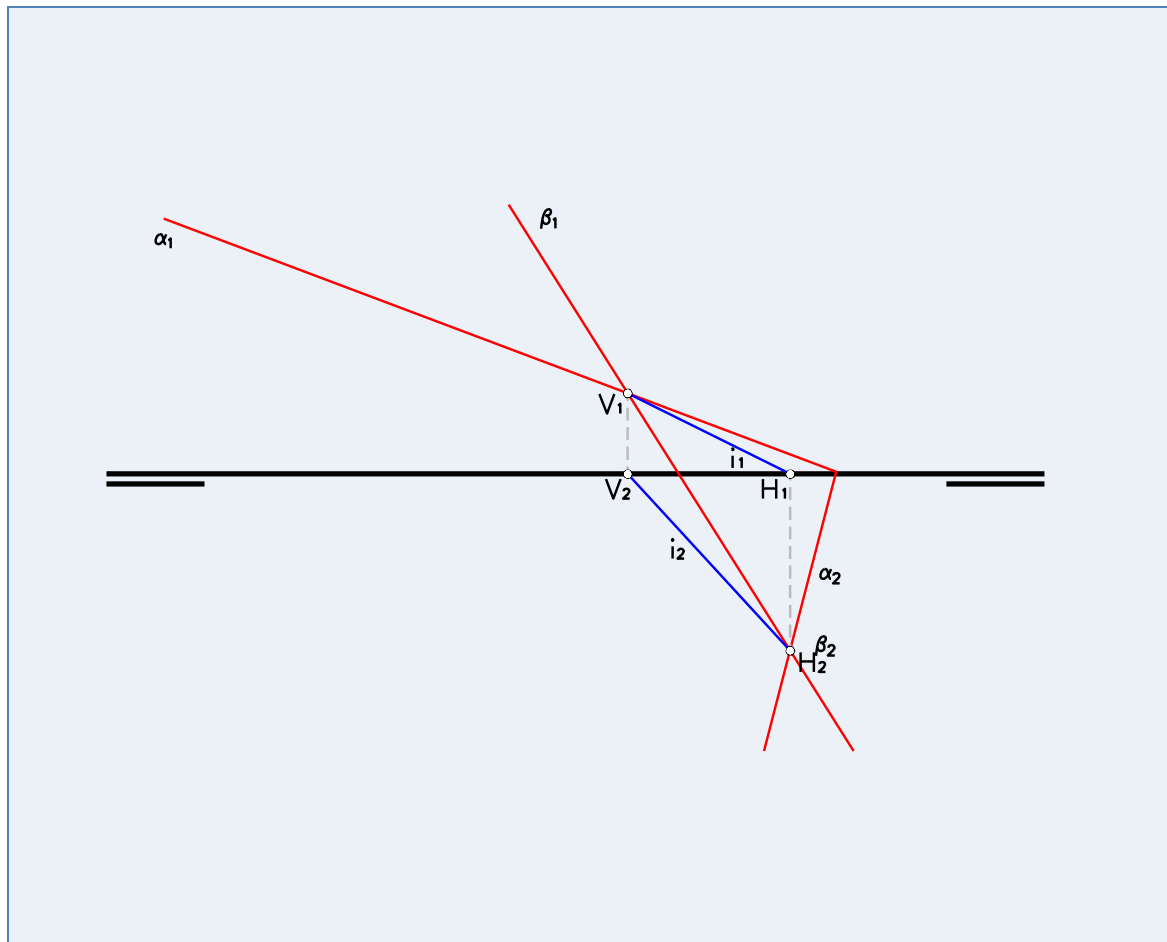


Figura 86. Intersección de dos planos con trazas homónimas paralelas

6.1.2.10. Intersección de un plano perpendicular al segundo bisector con otro plano cualquiera



**Figura 87. Intersección de un plano perpendicular al segundo bisector con otro plano cualquiera**

6.1.2.11. Intersección de dos planos perpendiculares al segundo bisector

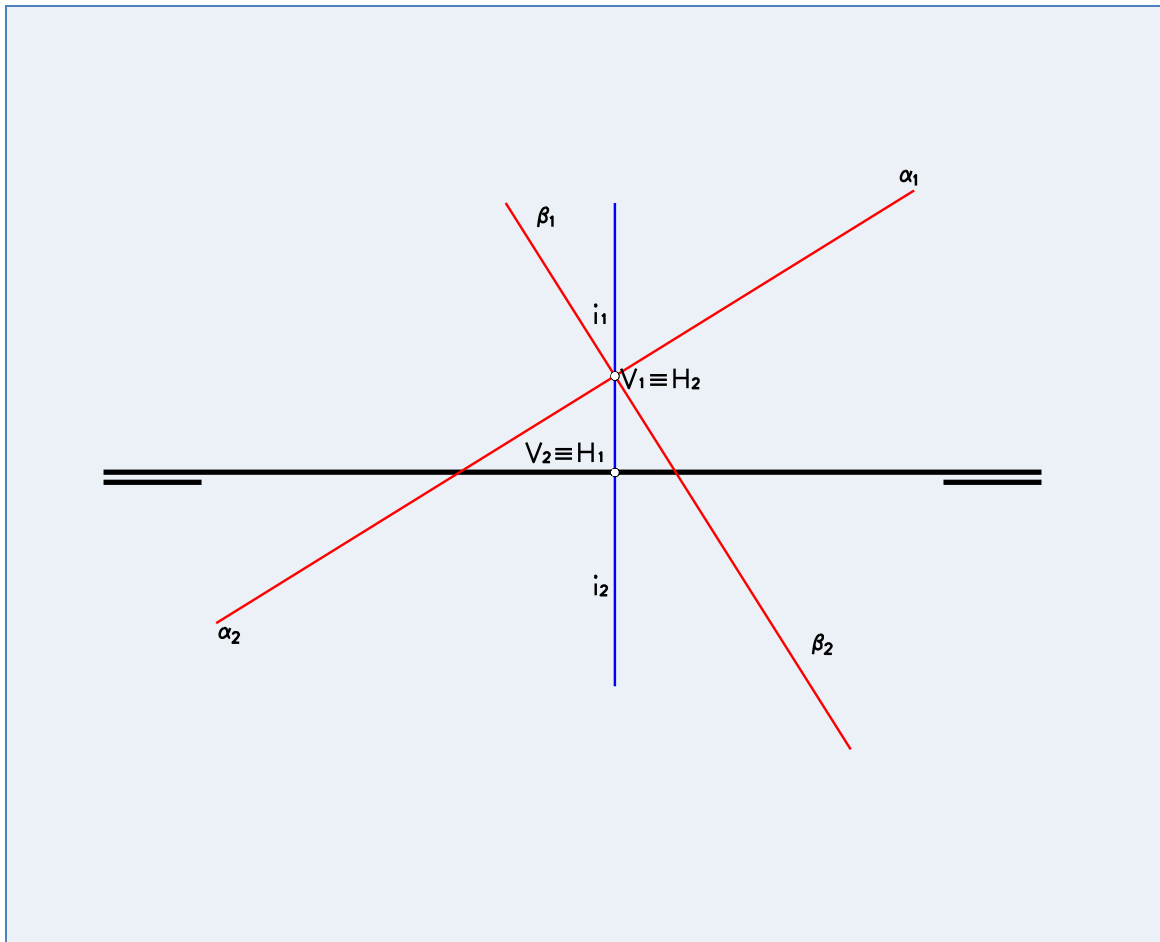
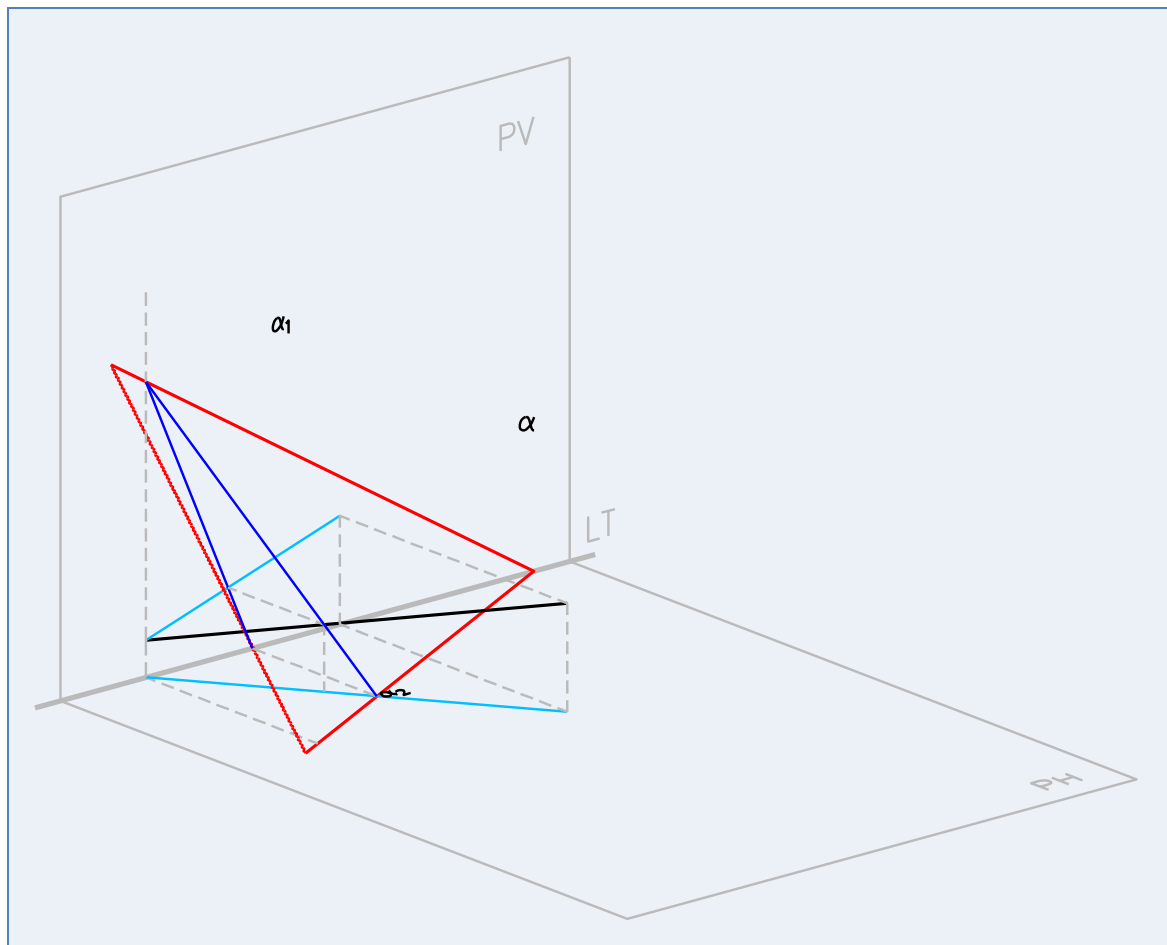


Figura 88. Intersección de dos planos perpendiculares al segundo bisector

## 6.2. Intersecciones entre recta y plano

La intersección entre una recta  $r$  y un plano  $\alpha$  es un punto  $I$  común a ambos. Para su solución se utiliza un plano auxiliar  $\beta$  que contenga a la recta, generalmente proyectante. La intersección entre el plano  $\beta$ , que contiene a  $r$ , y el plano  $\alpha$ , es la recta  $s$ , que corta a  $r$  en el punto  $I$ .



**Figura 89. Intersección entre recta y plano 3D**



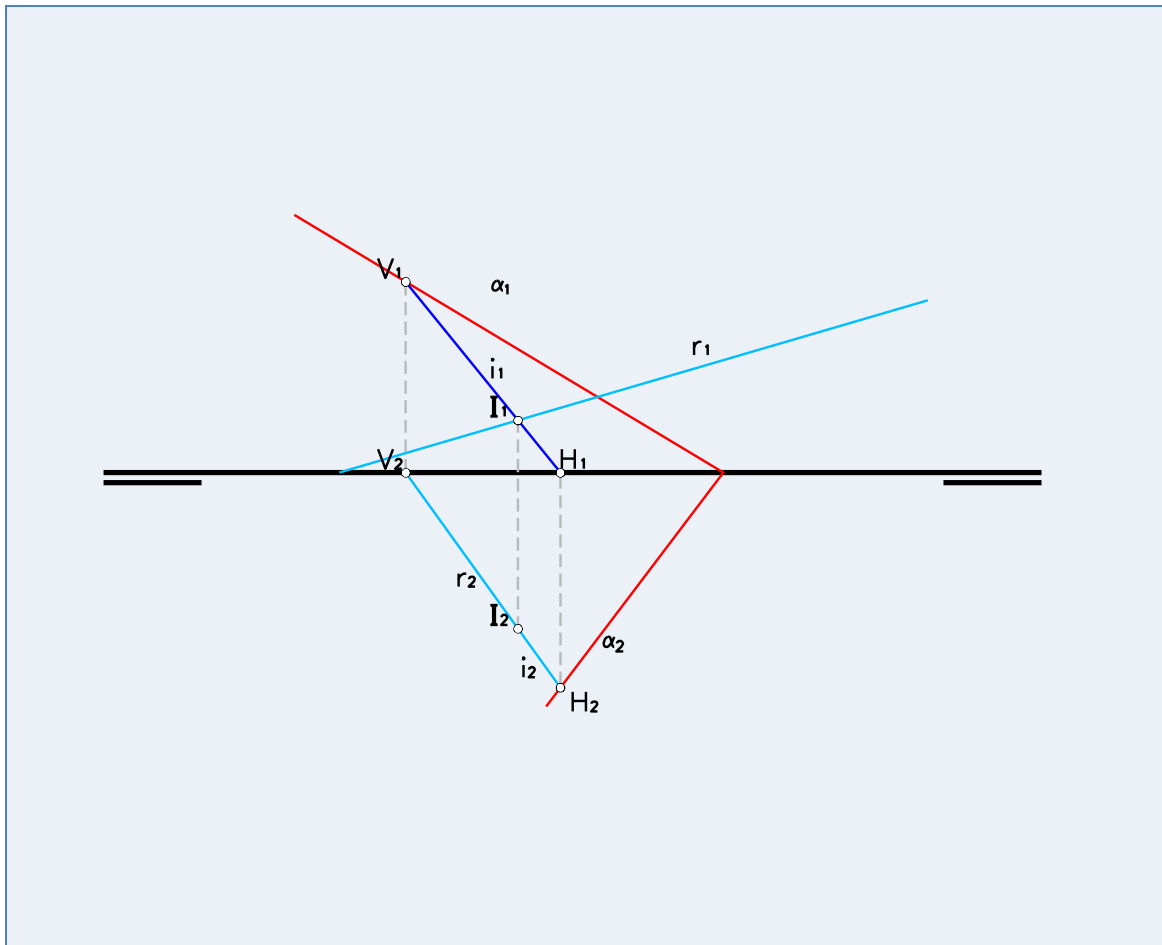


Figura 90. Intersección entre recta y plano

### 6.2.1. Intersección de recta y plano definido por tres puntos

La intersección entre un recta  $r$  con un plano dado por tres puntos no consecutivos  $ABC$ , se determina conteniendo la recta  $r$  en un plano proyectante, que corta al plano  $ABC$  según la recta  $1-2$ . La intersección entre  $r$  y  $1-2$  es el punto  $I$  buscado.

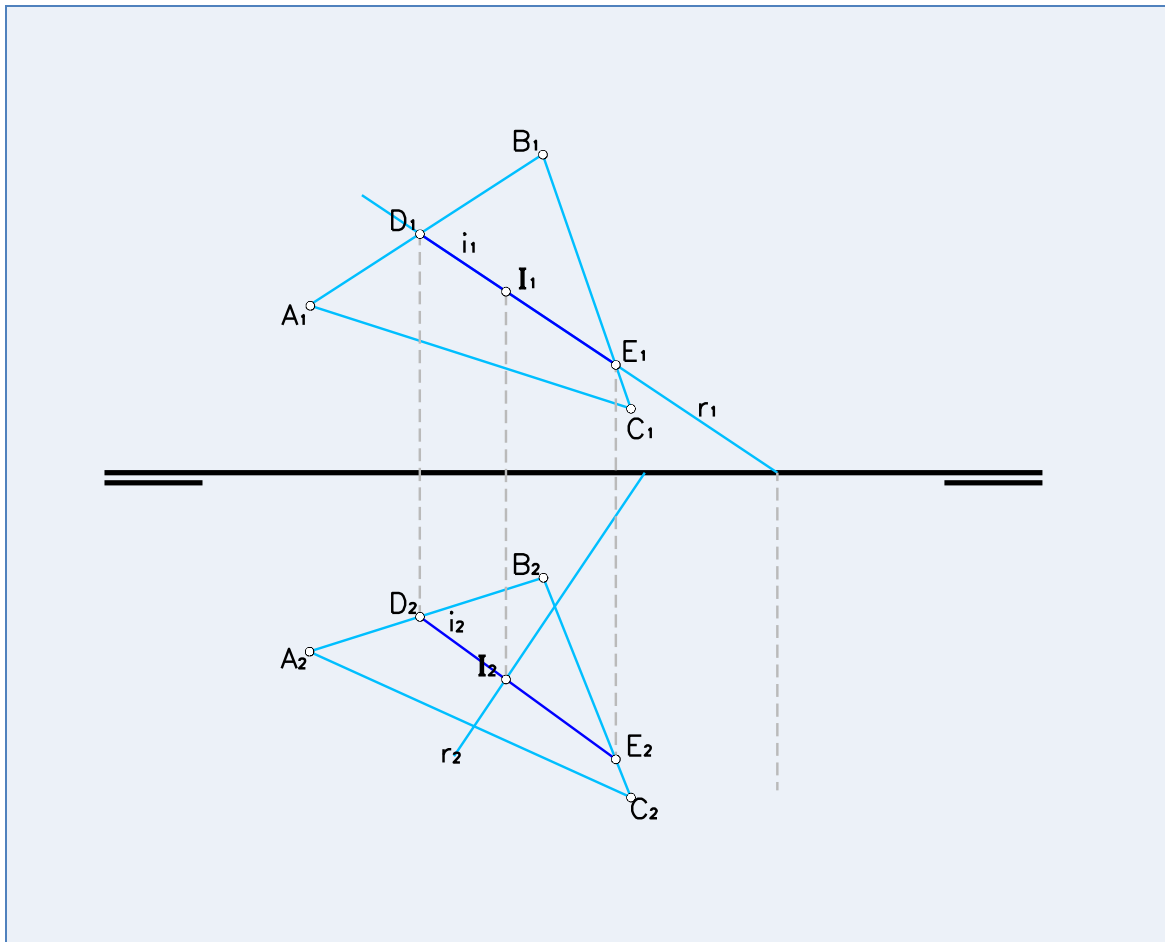
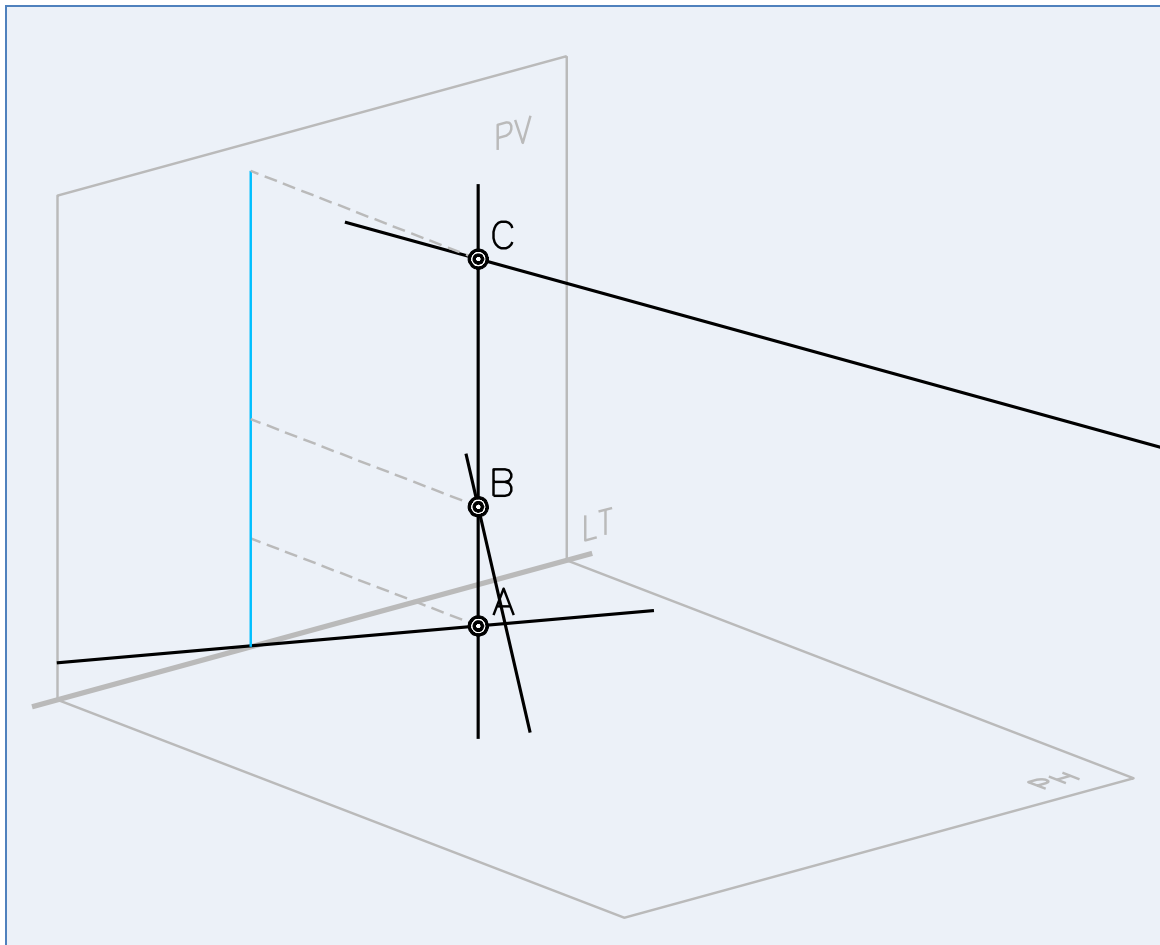


Figura 91. Intersección de recta y plano definido por tres puntos

### 6.3. Recta que corta o se apoya en otras tres rectas que se cruzan

Este problema tiene infinitas soluciones a no ser que se especifique un punto de obligado paso en una de las rectas.



**Figura 92. Recta que corta otras tres rectas que se cruzan 3D**

La recta buscada podrá encontrarse mediante dos procedimientos:

1. Por intersección de planos.
  - 1.1. Se toma un punto **A** sobre una de las rectas.
  - 1.2. Se determinan los planos formados por el punto **A** y cada una de las otras dos rectas **R** y **T**: planos **P** y **Q** respectivamente.
  - 1.3. La intersección de los planos **P** y **Q** será la recta buscada.
2. Por intersección de recta y plano.
  - 2.1. Se determina el plano formado por el punto **A** y una de las rectas: plano **Q**.
  - 2.2. Se determina la intersección de la otra recta y el plano **Q**: punto **B**.
  - 2.3. La recta determinada por el punto **B** y el punto **A** será la recta buscada.

## Ejemplo

Las rectas  $r$ ,  $s$  y  $t$  representan los ejes de tres tuberías que hay que unir, entre sí, mediante otra tubería rectilínea  $w$  que pasa por el punto  $A$ . Determinar las proyecciones de la tubería  $w$ .

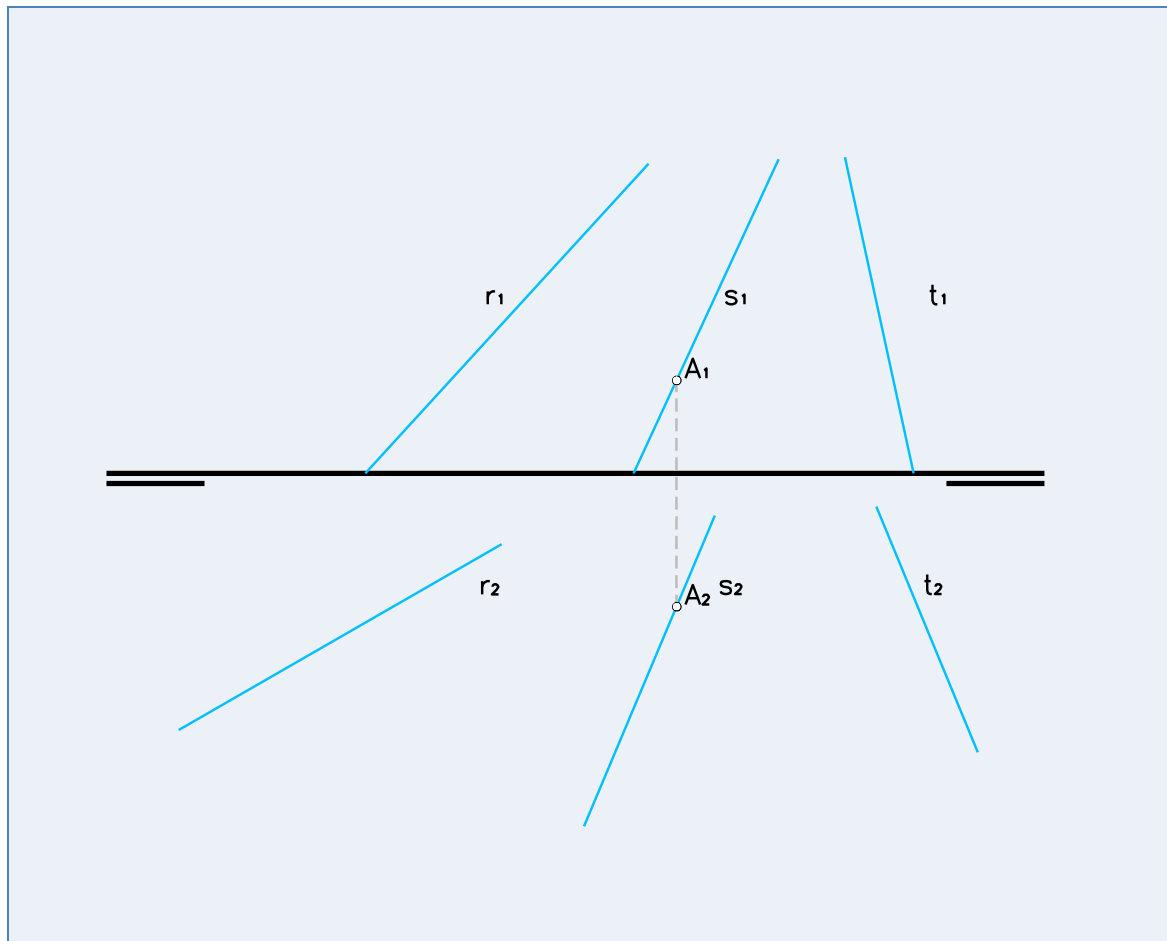
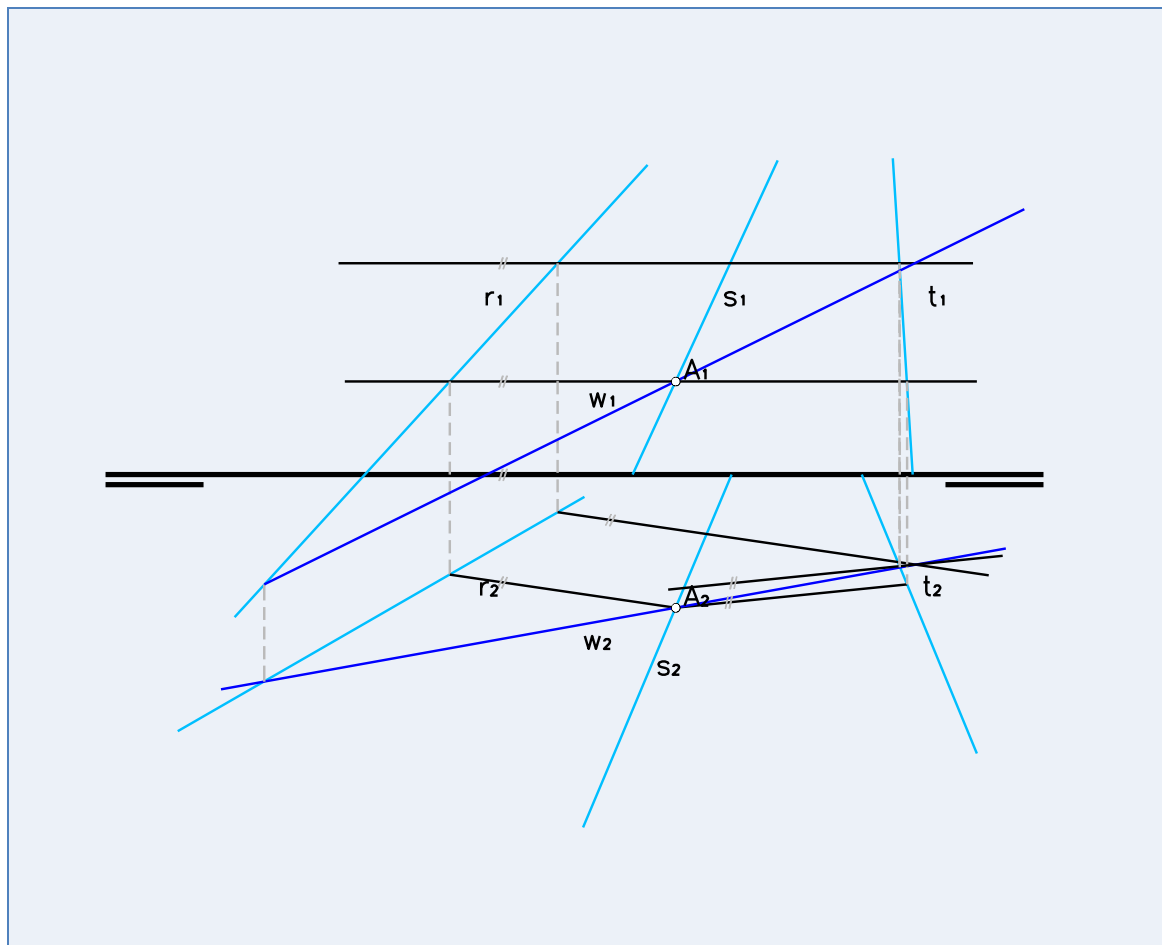


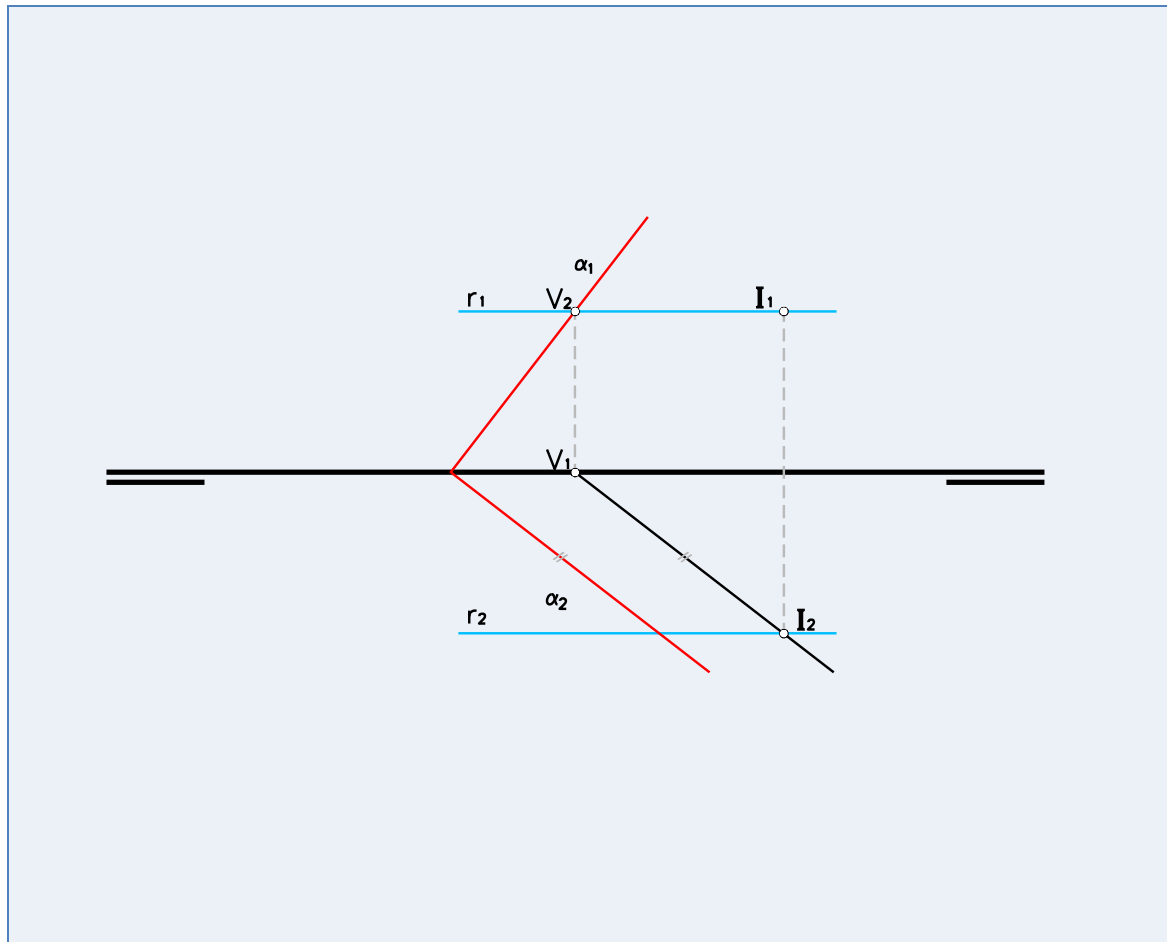
Figura 93. Enunciado recta que corta a otras tres rectas que se cruzan



**Figura 94. Recta que corta a otras tres rectas que se cruzan**

A continuación se presentan una serie de ejemplos de intersecciones entre rectas y planos con los que es aconsejable que el alumno juegue a solucionar antes de ver el desarrollo de ejemplo. De este modo se conseguirá una doble actividad recordatoria de alfabetos y habilidad en la resolución de los problemas planteados.

## 6.3.1. Intersección de un plano con una recta paralela a LT

**Figura 95. Intersección de un plano con una recta paralela a LT**

6.3.2. Intersección de un plano con una recta que pasa por la LT

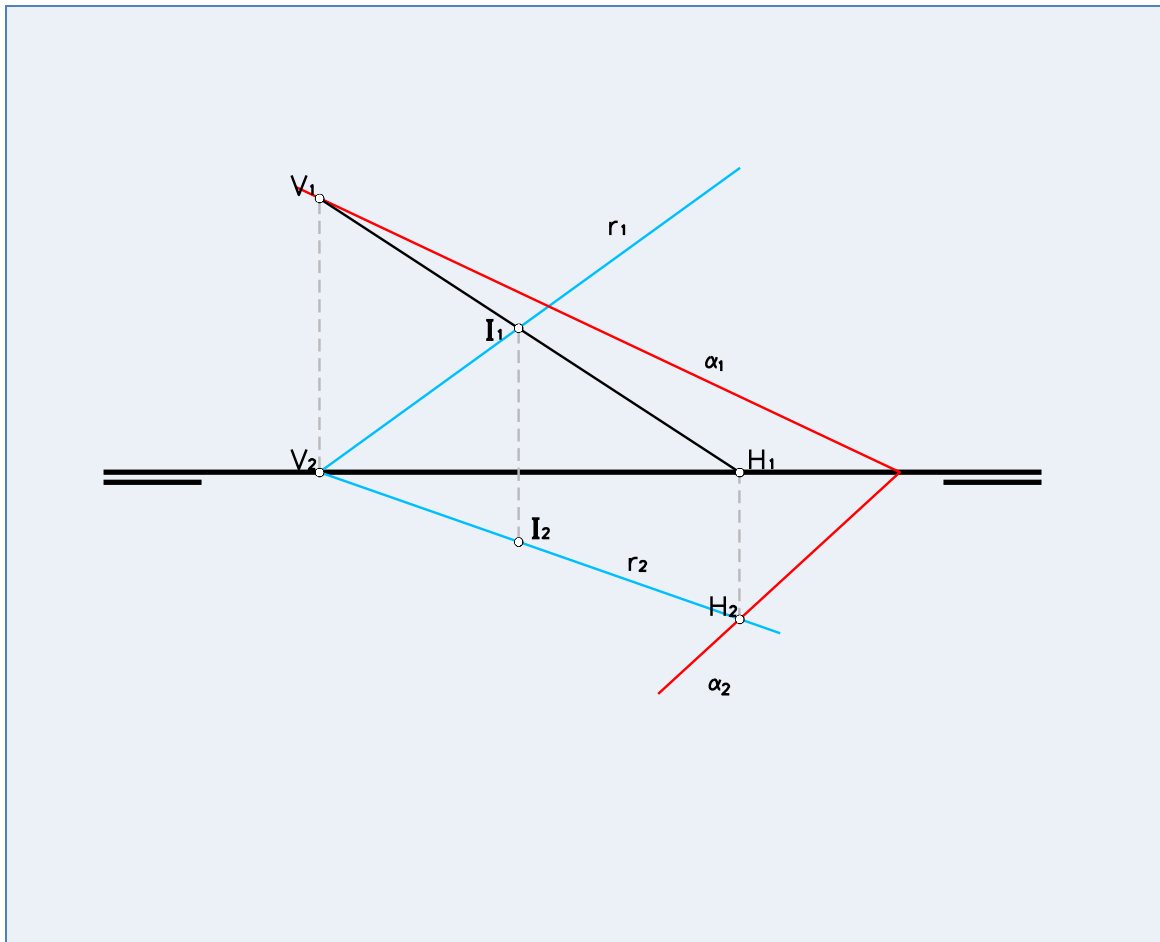
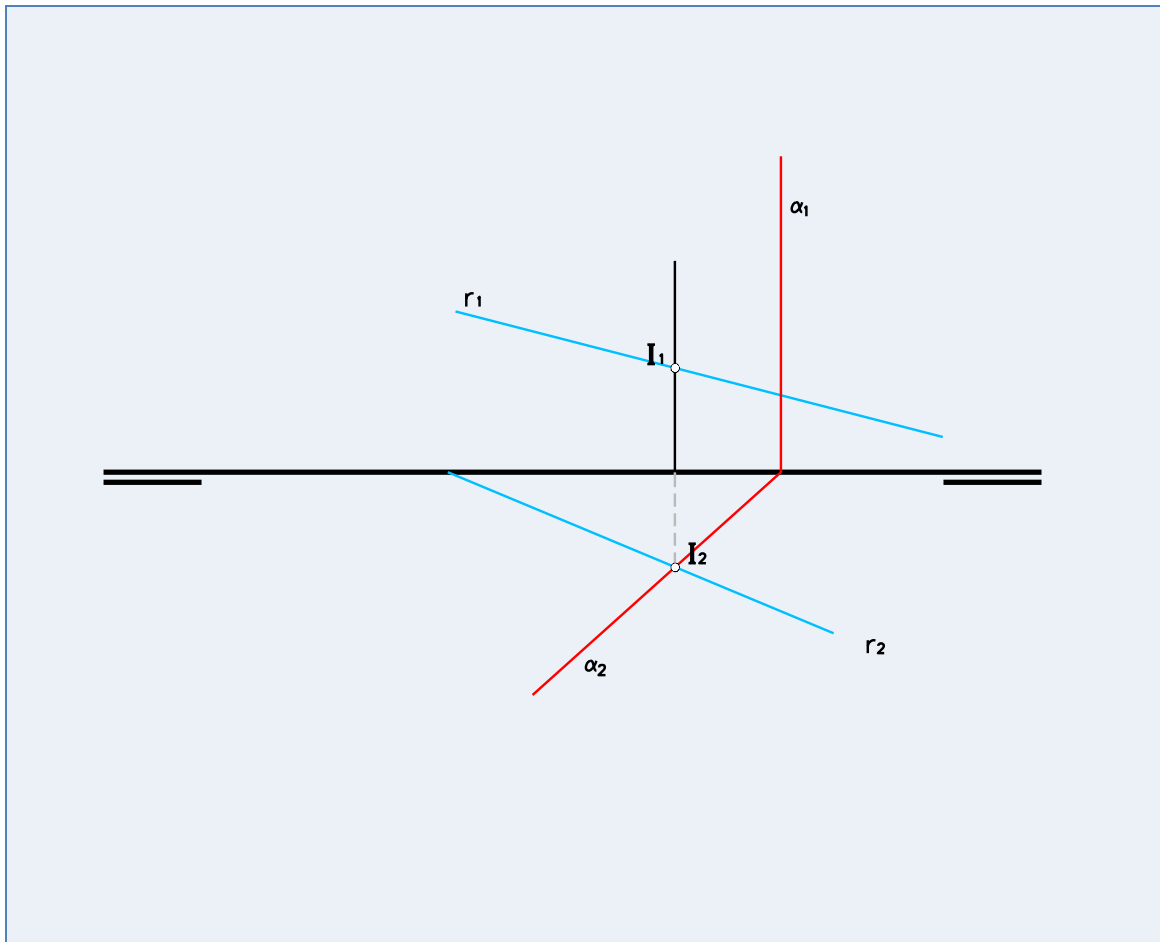


Figura 96. Intersección de un plano con una recta que pasa por la LT

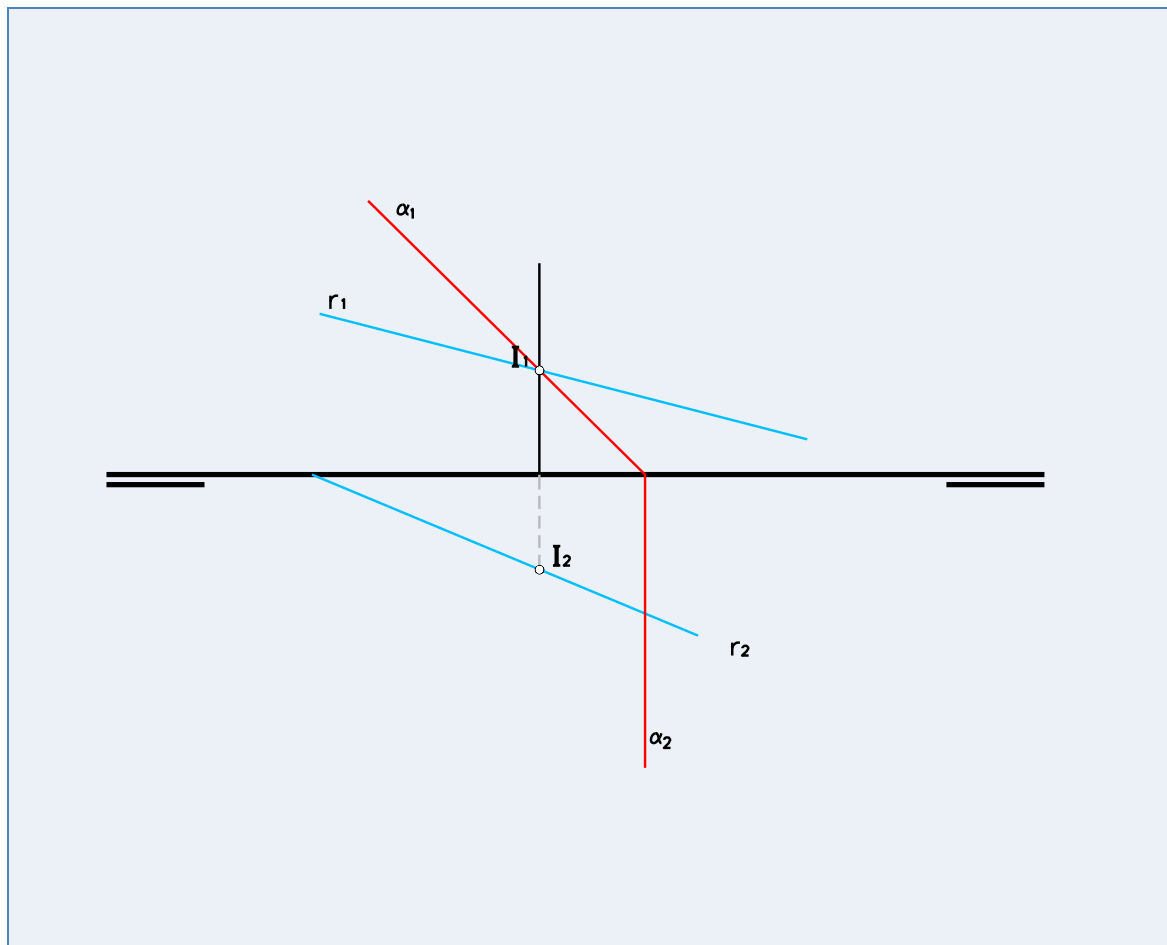




6.3.4. Intersección de una recta con planos proyectantes



**Figura 98. Intersección de una recta con un plano proyectante horizontal**



**Figura 99. Intersección de una recta con un plano proyectante vertical**

6.3.5. Intersección de una recta con un plano paralelo al horizontal

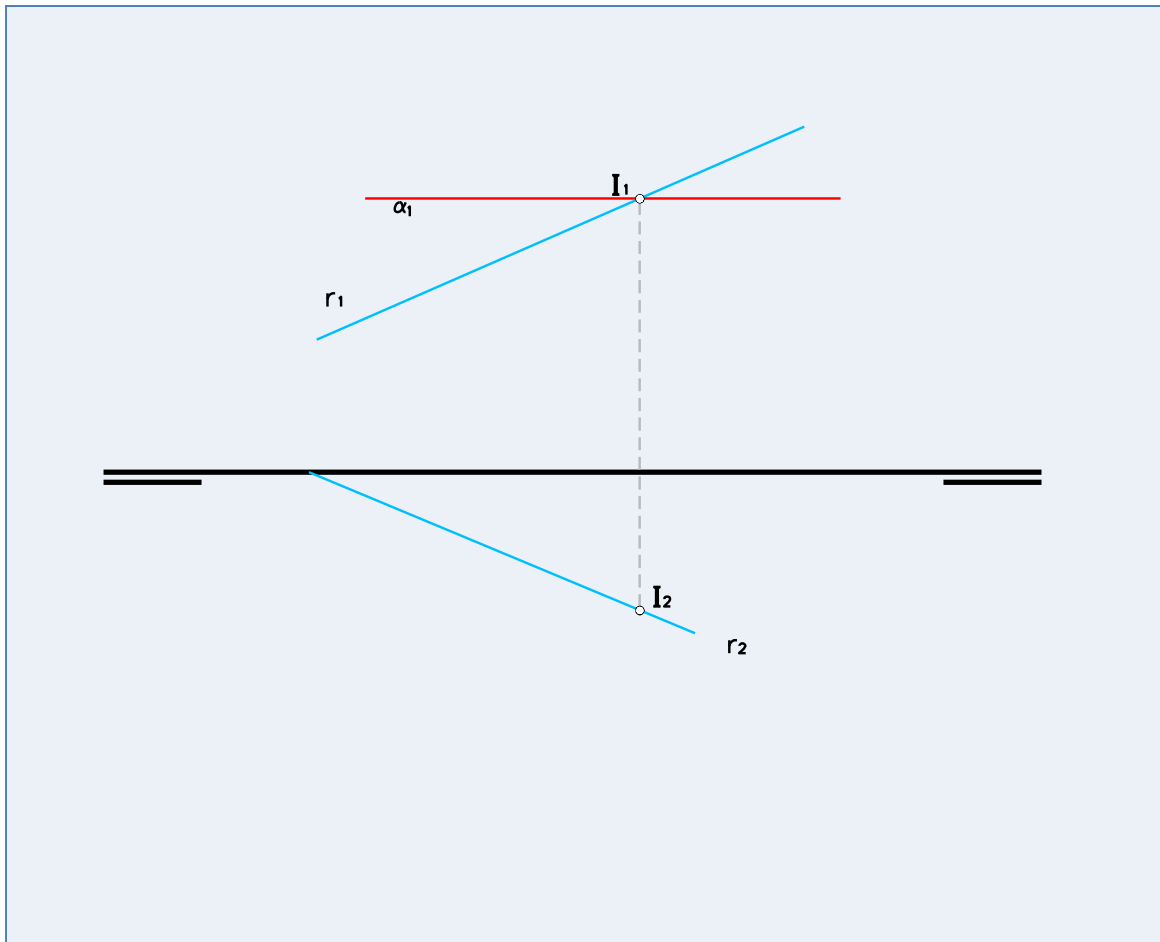
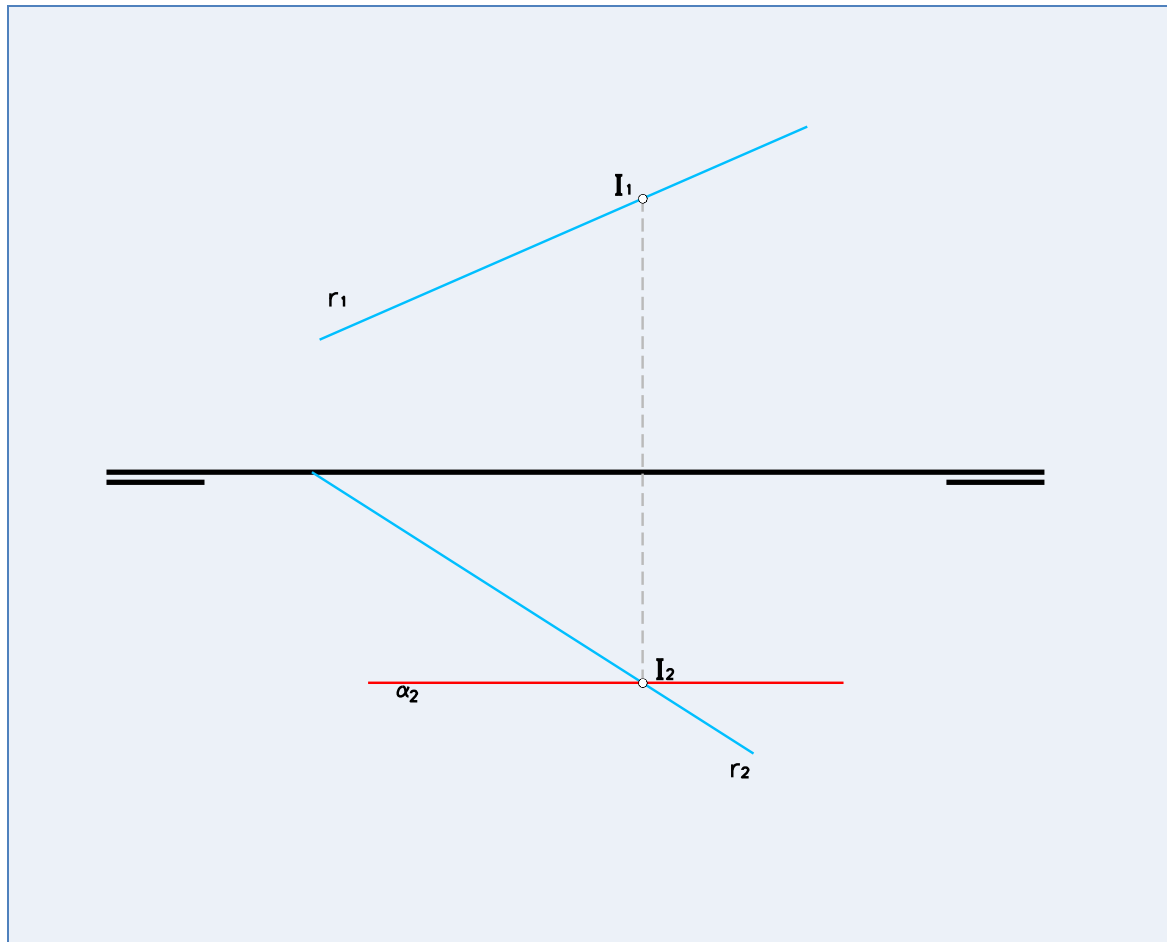


Figura 100. Intersección de una recta con un plano paralelo al horizontal

## 6.3.6. Intersección de una recta con un plano paralelo al vertical

**Figura 101. Intersección de una recta con un plano paralelo al vertical**

6.3.7. Intersección de una recta con un plano perpendicular al primer bisector

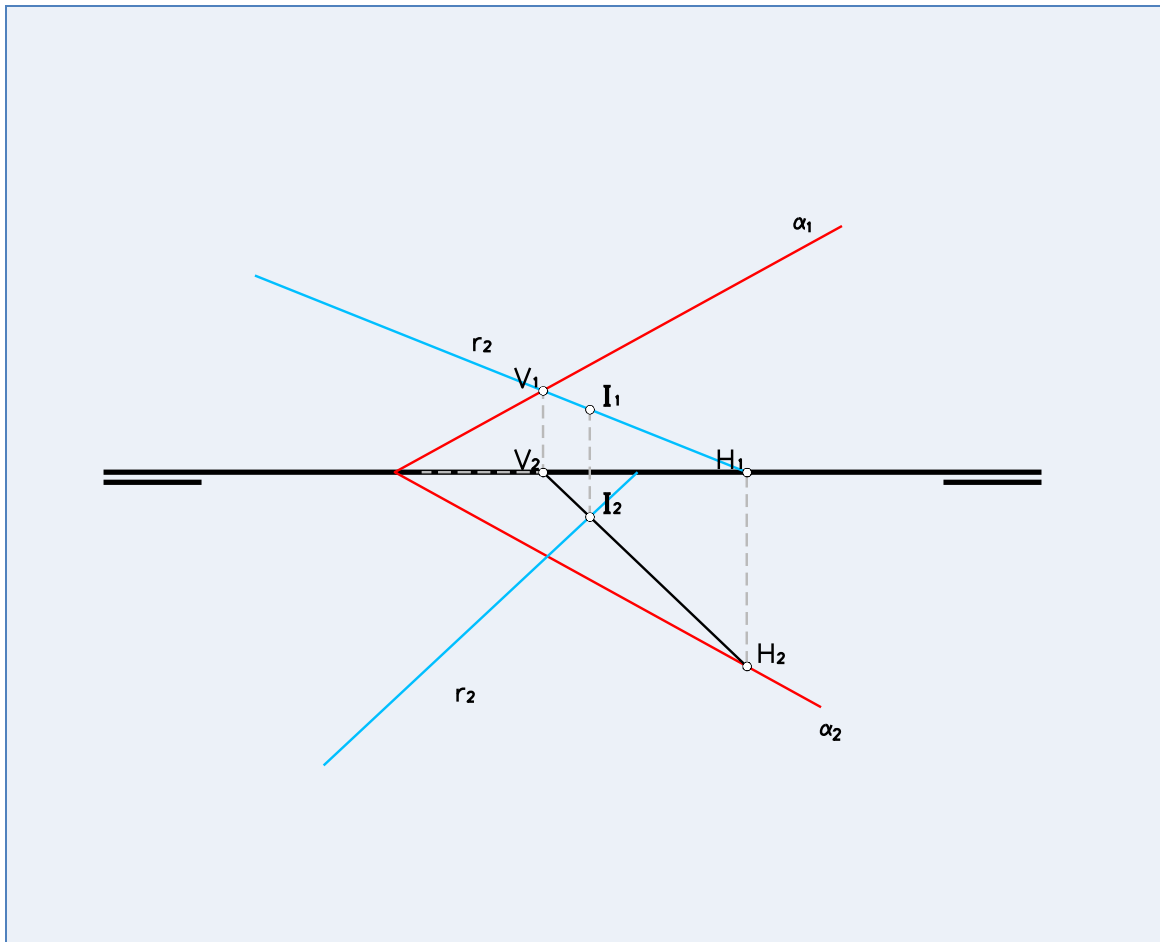
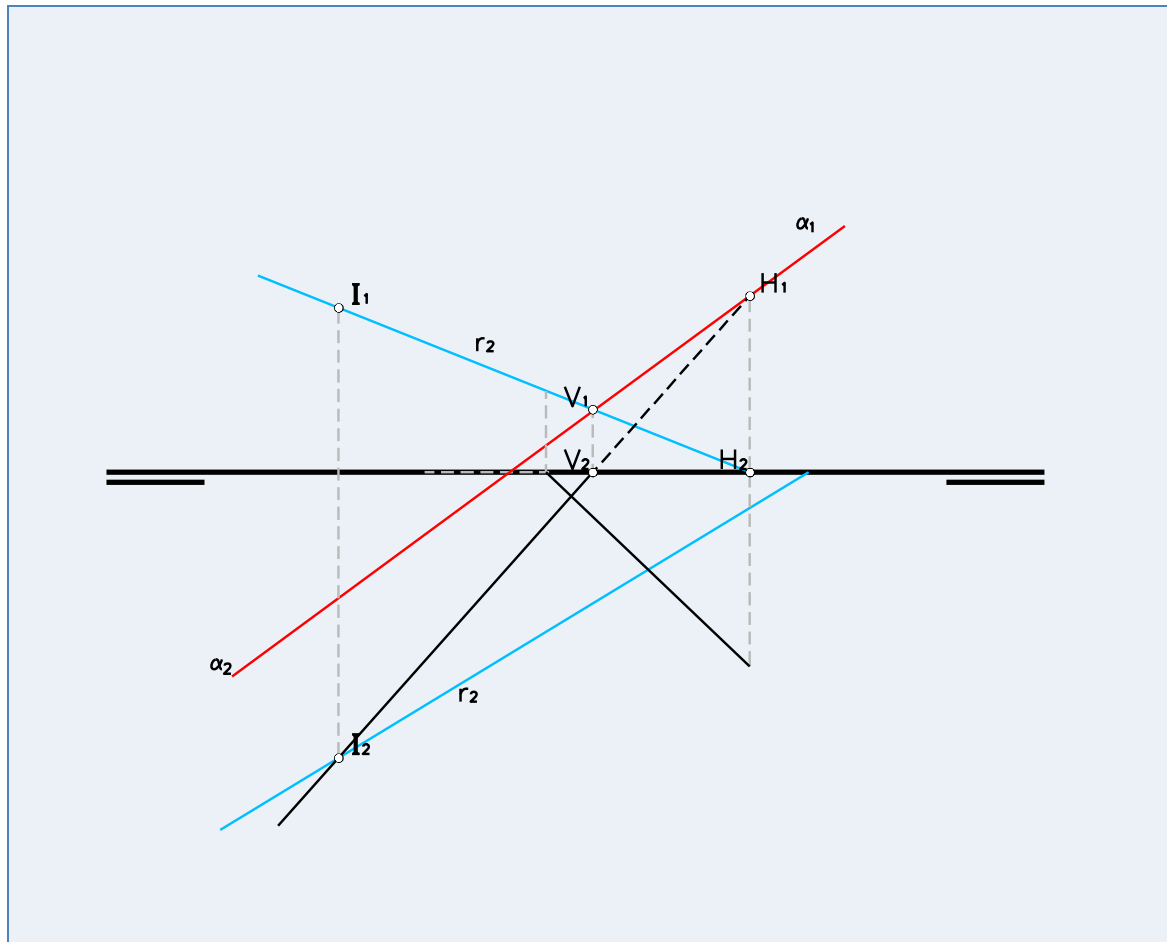


Figura 102. Intersección de una recta con un plano perpendicular al primer bisector

## 6.3.8. Intersección de una recta con un plano perpendicular al segundo bisector



**Figura 103.** Intersección de una recta con un plano perpendicular al segundo bisector



# Tema 7

## Paralelismo

### 7.1. Rectas paralelas

Si dos rectas son paralelas en el espacio sus proyecciones ortogonales sobre los planos de proyección serán paralelas.

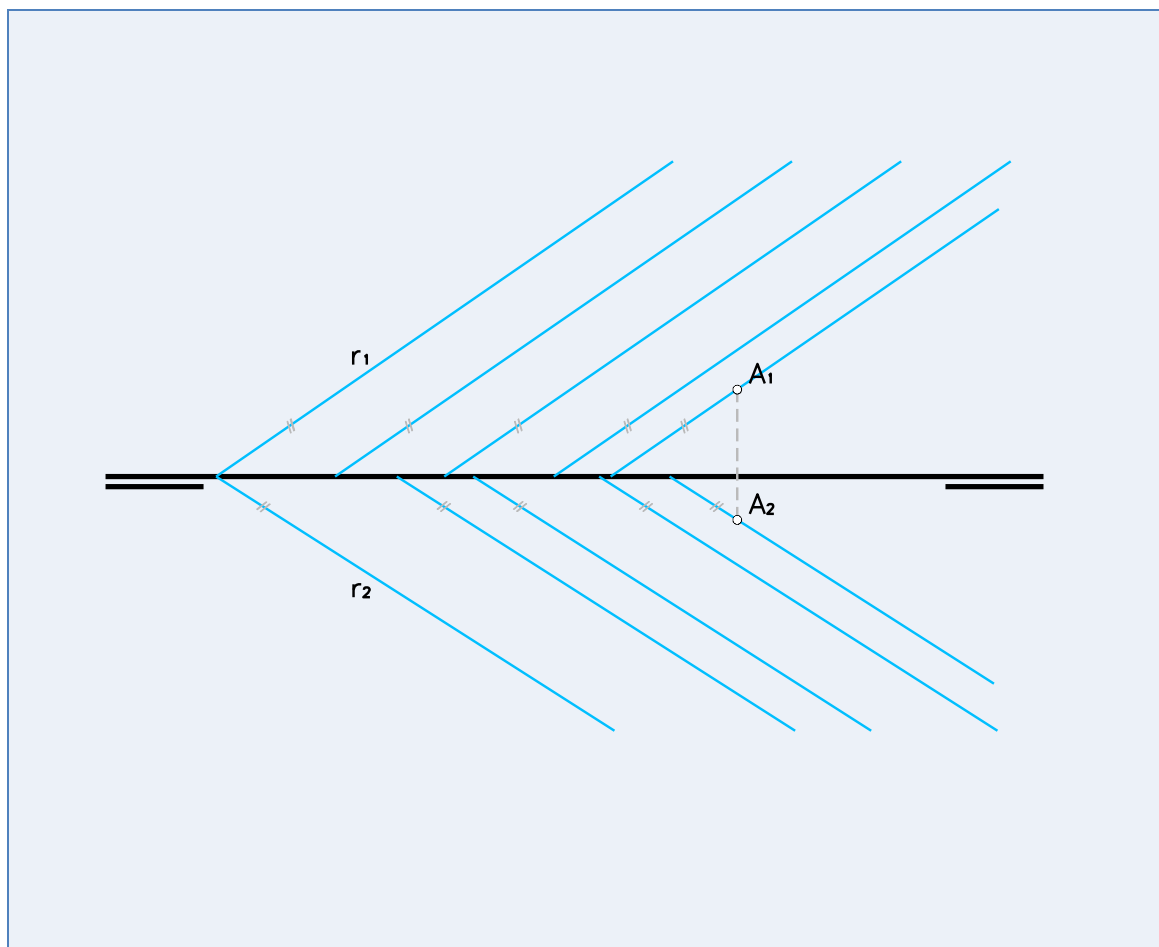
Del mismo modo que si las proyecciones ortogonales de dos rectas son paralelas dichas rectas lo son en el espacio.

En el caso excepcional de las rectas de perfil debe buscarse su resolución sobre el plano de perfil PP.

Grados de libertad de la solución:

- sin condiciones: infinitas rectas.
- por un punto: una sola recta.





**Figura 104. Rectas paralelas**

## 7.2. Recta paralela a un plano

Una recta será paralela a un plano si lo es a una recta cualquiera de dicho plano.

Grados de libertad de la solución:

- sin condiciones: infinitas rectas.
- por un punto:
  - sin condiciones: infinitas rectas.
  - de dirección conocida: una sola recta.

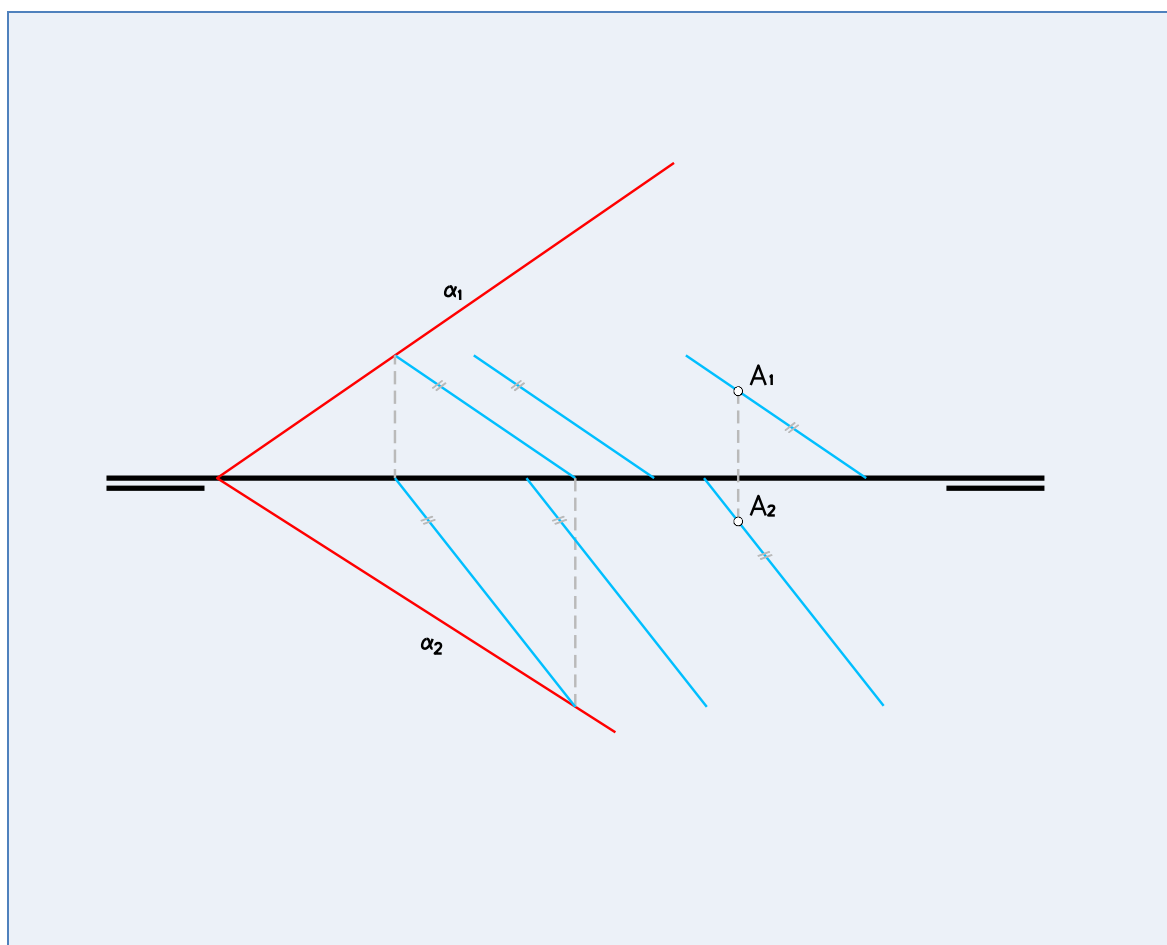


Figura 105. Recta paralela a un plano

### 7.3. Plano paralelo a una recta

Ejercicio inverso al anterior, ahora buscamos el plano que es paralelo a una recta dada. Un plano será paralelo a una recta  $r$  dada si contiene una recta  $s$  paralela a la dada.

Grados de libertad de la solución:

- por un punto: infinitos planos.
- que pase por una recta: un solo plano.

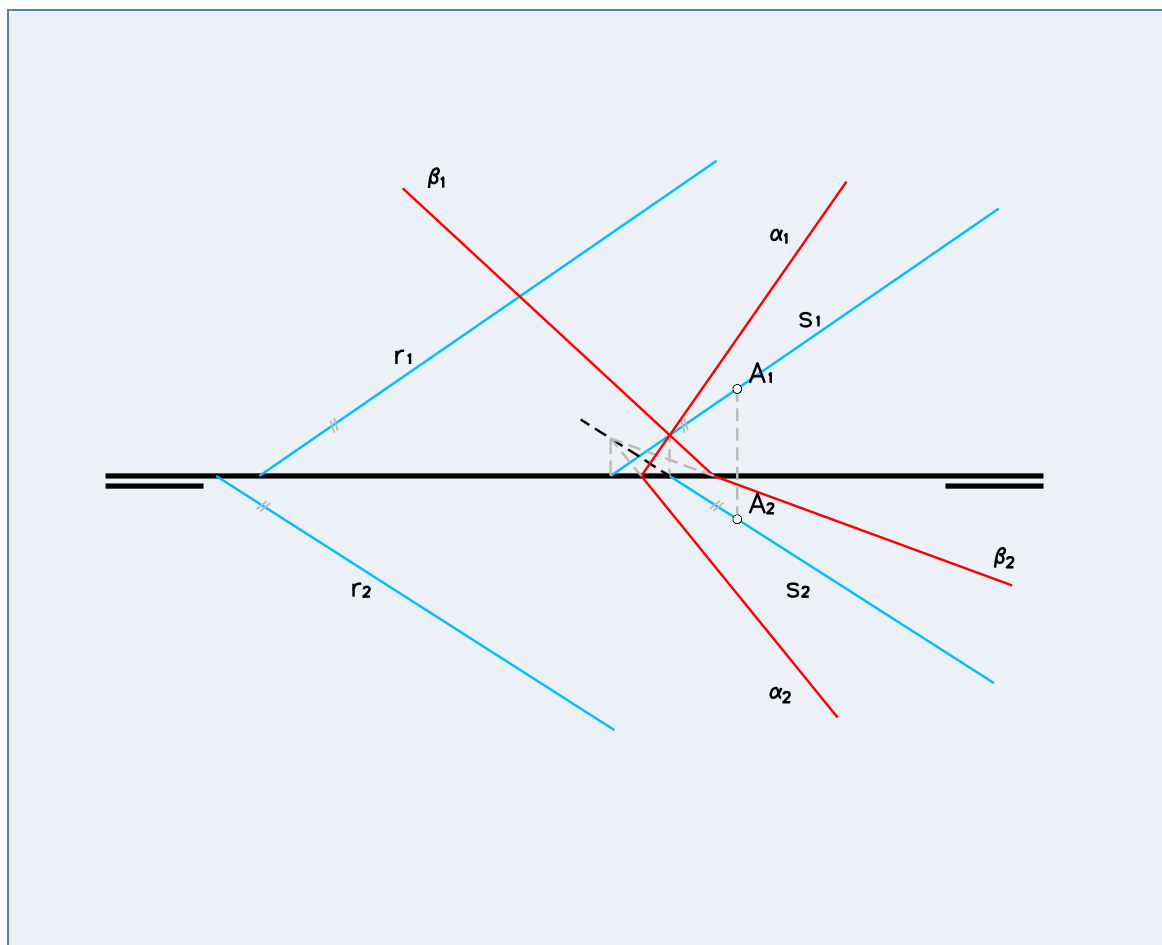


Figura 106. Plano paralelo a una recta

A continuación se desarrolla un ejemplo de un plano que contiene a una recta dada  $t$  y es paralelo a otra dada  $r$ .

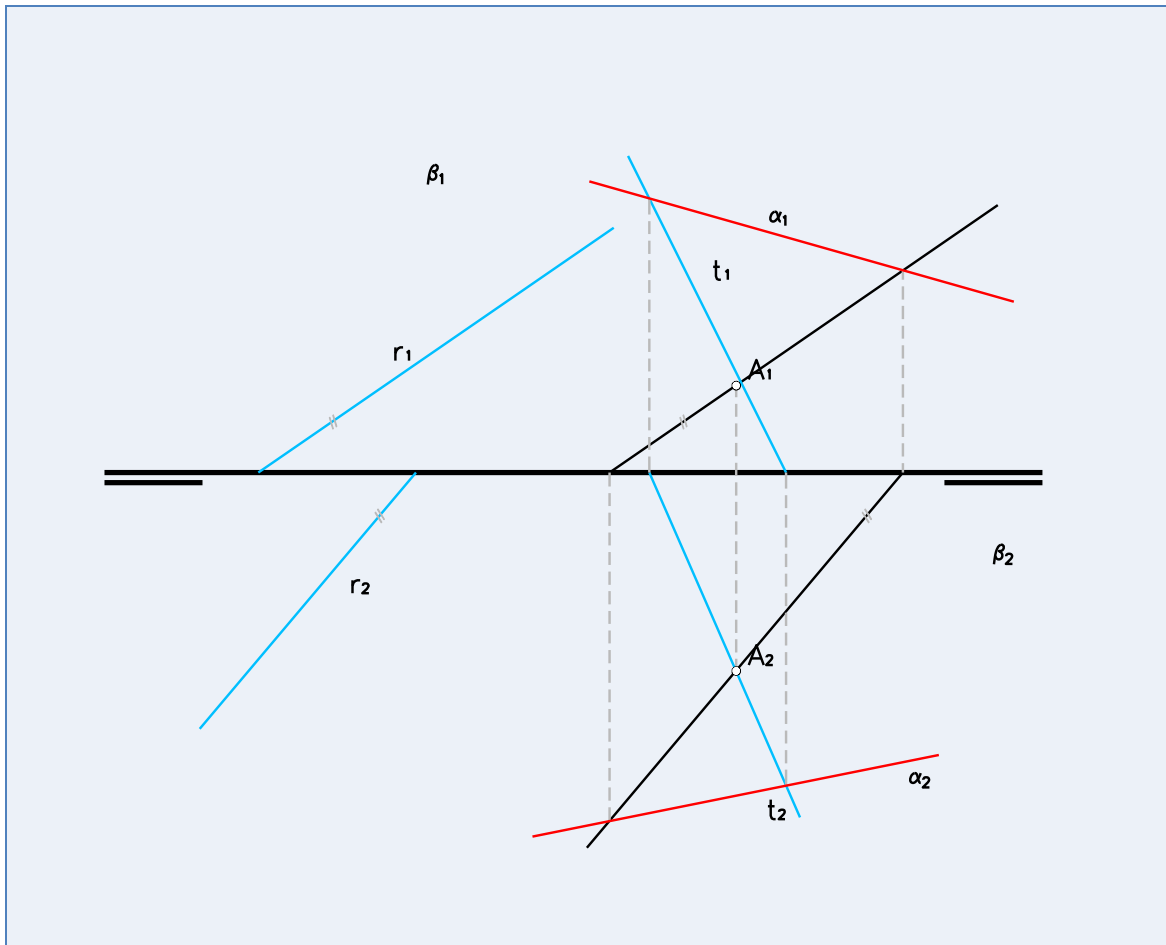


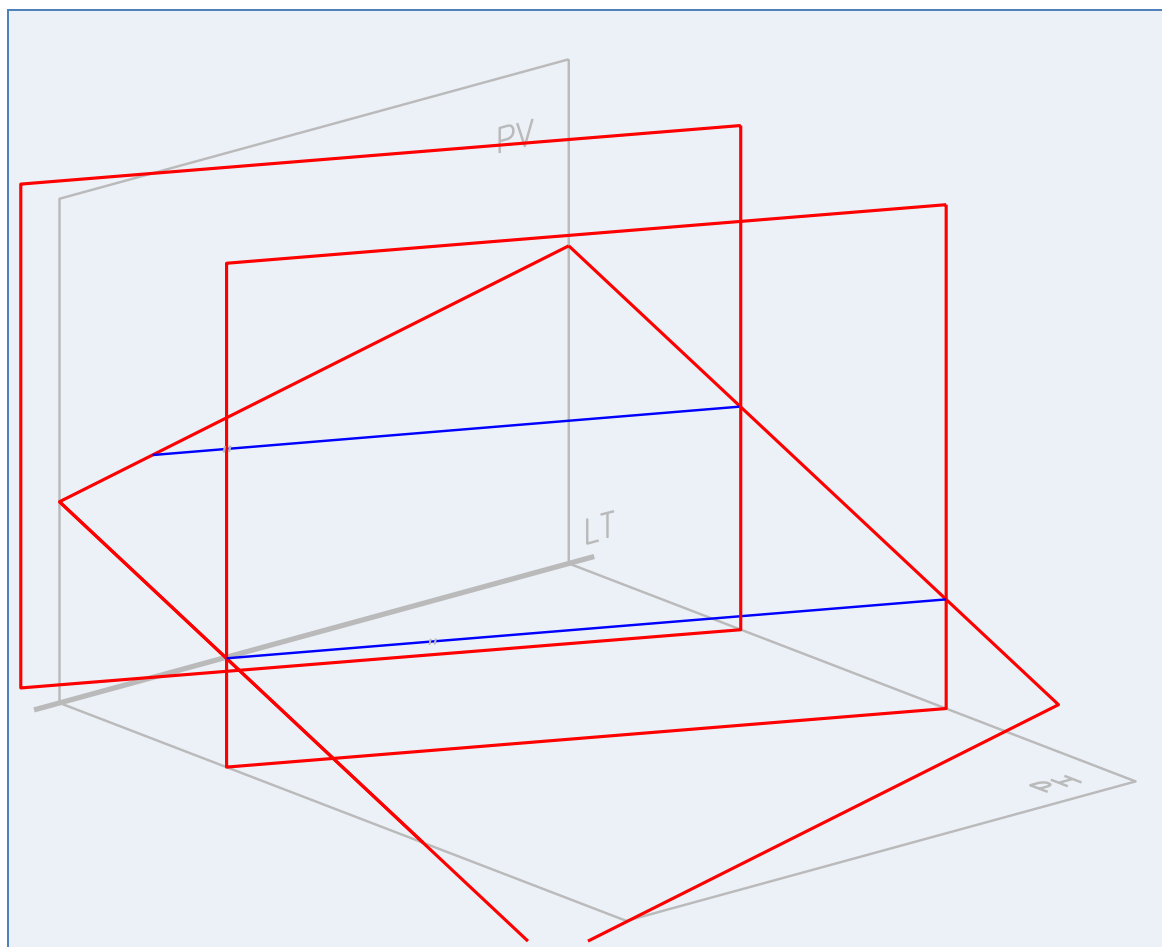
Figura 107. Plano que contiene a una recta dada y es paralelo a otra

## 7.4. Planos paralelos

Dos o más planos son paralelos entre sí si las rectas resultantes de la intersección con otro plano cualquiera son paralelas.

Grados de libertad de la solución:

- sin condiciones: infinitos planos.
- por un punto: un solo plano.



**Figura 108. Planos paralelos 3D**

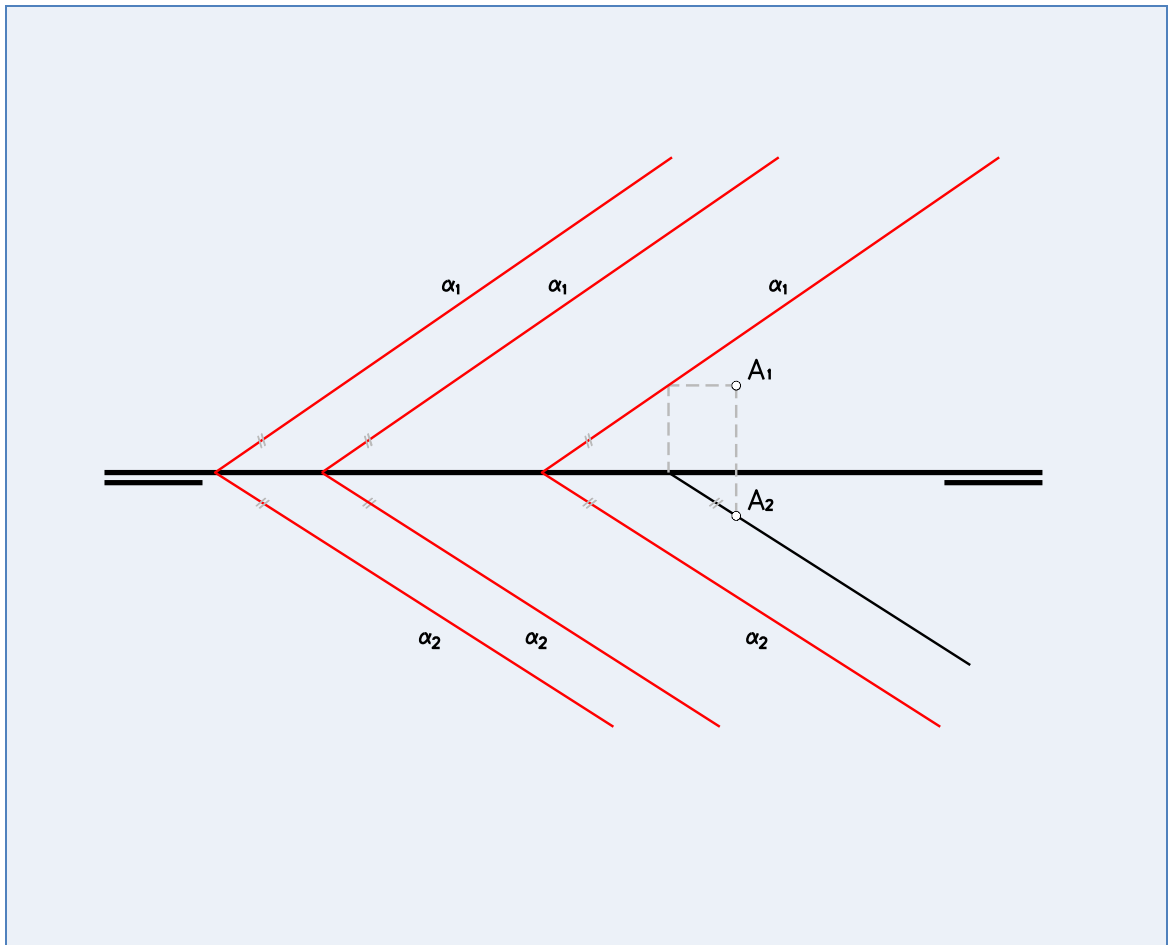


Figura 109. Planos paralelos



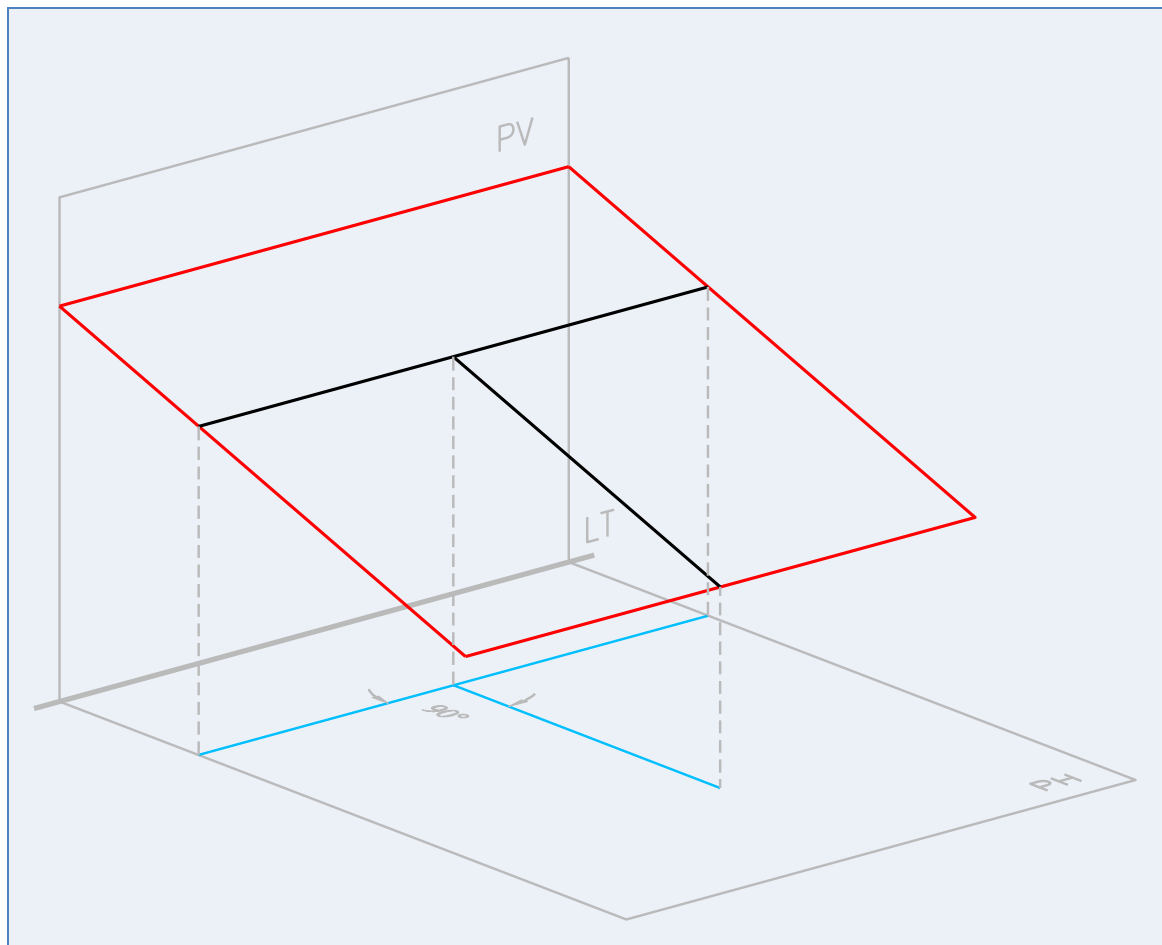
# Tema 8

## Perpendicularidad

Si dos rectas son perpendiculares en el espacio y una de ellas es paralela a un plano, las proyecciones ortogonales de ambas sobre dicho plano, son perpendiculares entre sí. (Teorema de las tres perpendiculares).

Un caso particular de este teorema es cuando una de las rectas, en vez de ser paralela al plano, está contenida en él. En este caso, la recta se confunde con su proyección ( $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2$ ), y tanto  $\mathbf{t}$  como  $\mathbf{t}_2$  son perpendiculares a esta recta doble.



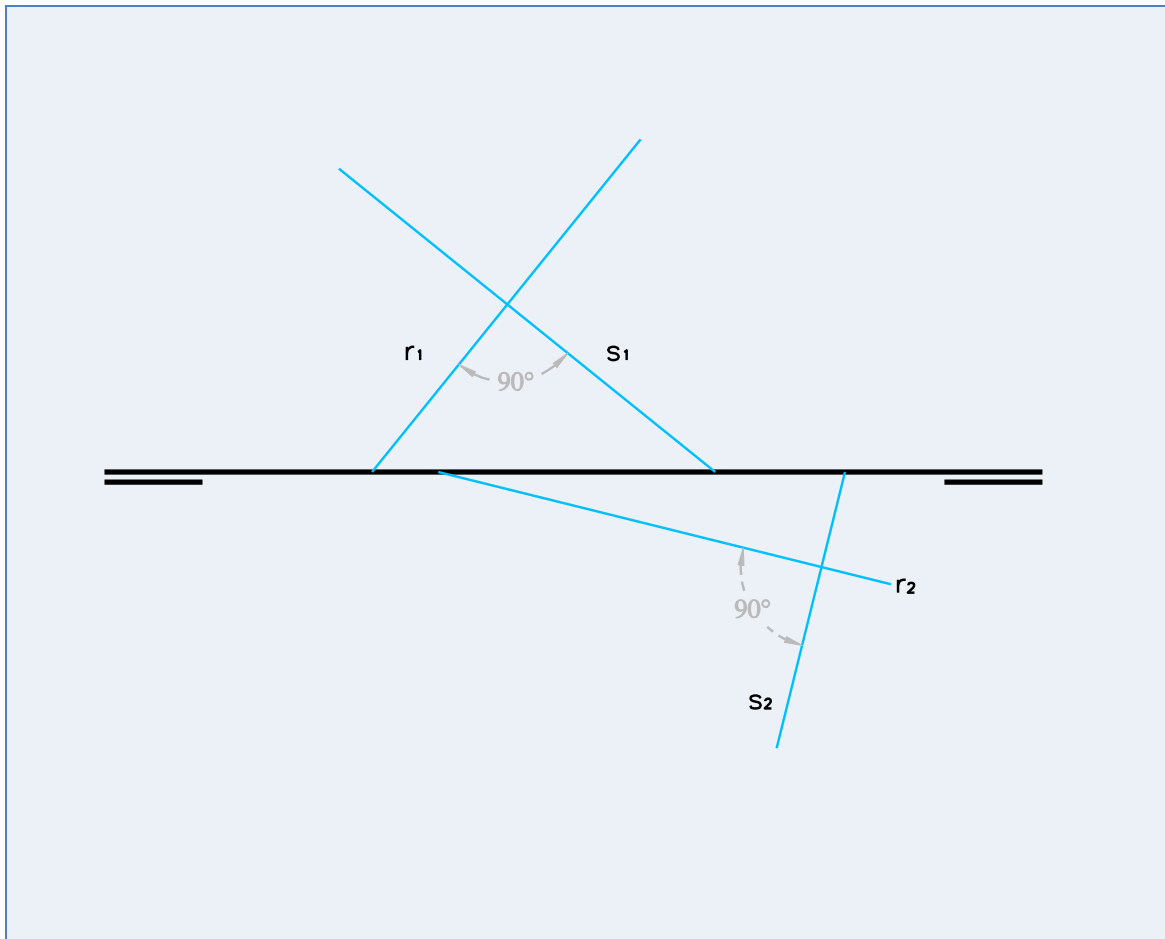


**Figura 110. Dos rectas perpendiculares 3D**

Así pues para comprobar la perpendicularidad debemos observar la intersección ortogonalmente desde un plano paralelo a una de las rectas, de ese modo vemos su verdadero ángulo.

## 8.1. Perpendicularidad entre rectas

Atendiendo al teorema de las tres perpendiculares, y tomando como proyecciones ortogonales las proyecciones de las rectas sobre **PH** y **PV**, se puede asegurar que dos rectas son perpendiculares si lo son sus proyecciones.



**Figura 111. Perpendicularidad entre rectas**

## 8.2. Perpendicularidad entre recta y plano

Una recta es perpendicular a un plano si lo es a dos de sus rectas (no siendo paralelas éstas entre sí).

Si una recta es perpendicular a un plano también lo es a cualquiera de sus rectas.

Dos rectas son perpendiculares entre sí si una de ellas pertenece a un plano perpendicular a la otra.

Para trazar una recta perpendicular a un plano basta con buscar la recta perpendicular a las dos trazas del plano (no olvidemos que las dos trazas son dos rectas de ese plano).

8.2.1. Recta perpendicular a un plano por un punto

Hacemos una recta perpendicular a las trazas del plano forzando que pase por A.

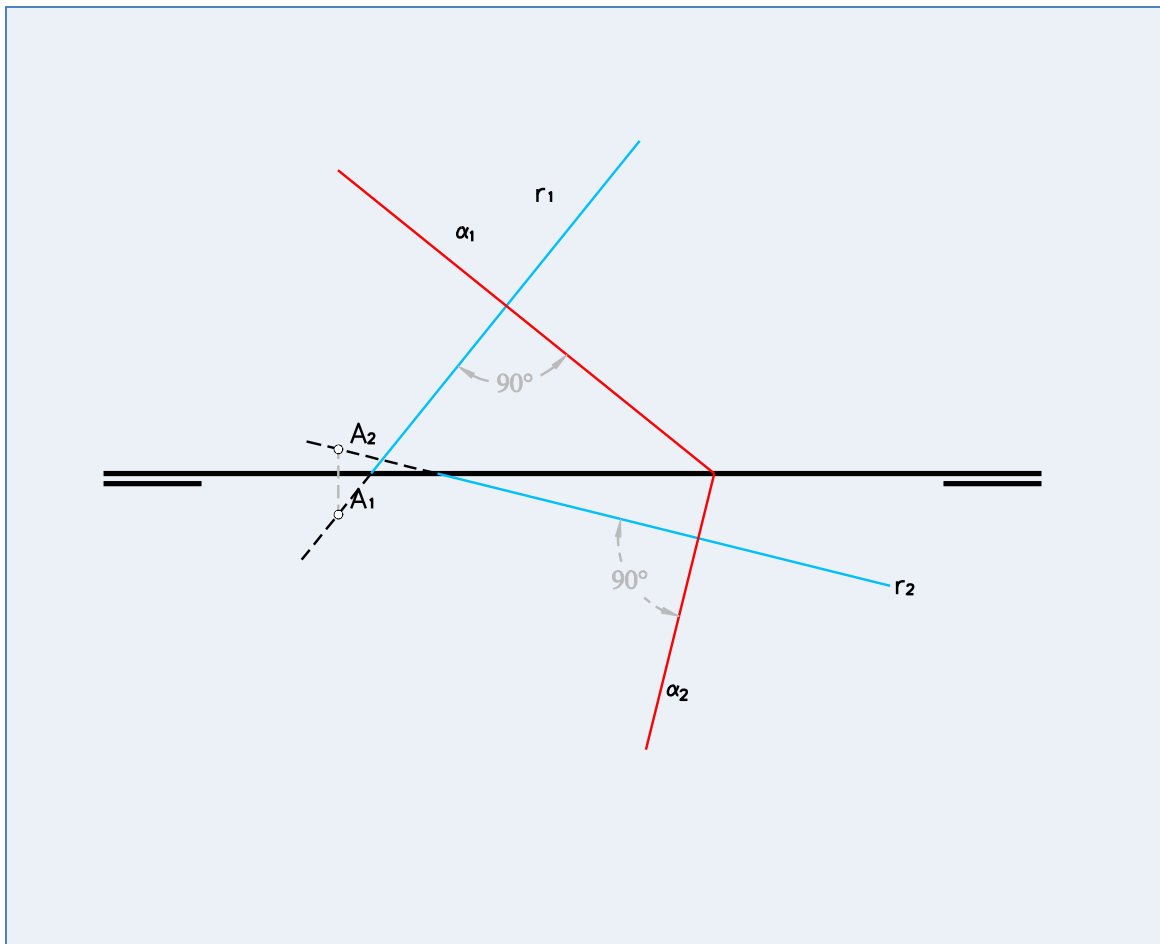


Figura 112. Recta perpendicular a un plano por un punto

### 8.2.2. Plano perpendicular a una recta por un punto

Las trazas del plano serán perpendiculares a las proyecciones de la recta. Para resolver el problema sólo debemos hacer que el plano contenga al punto A.

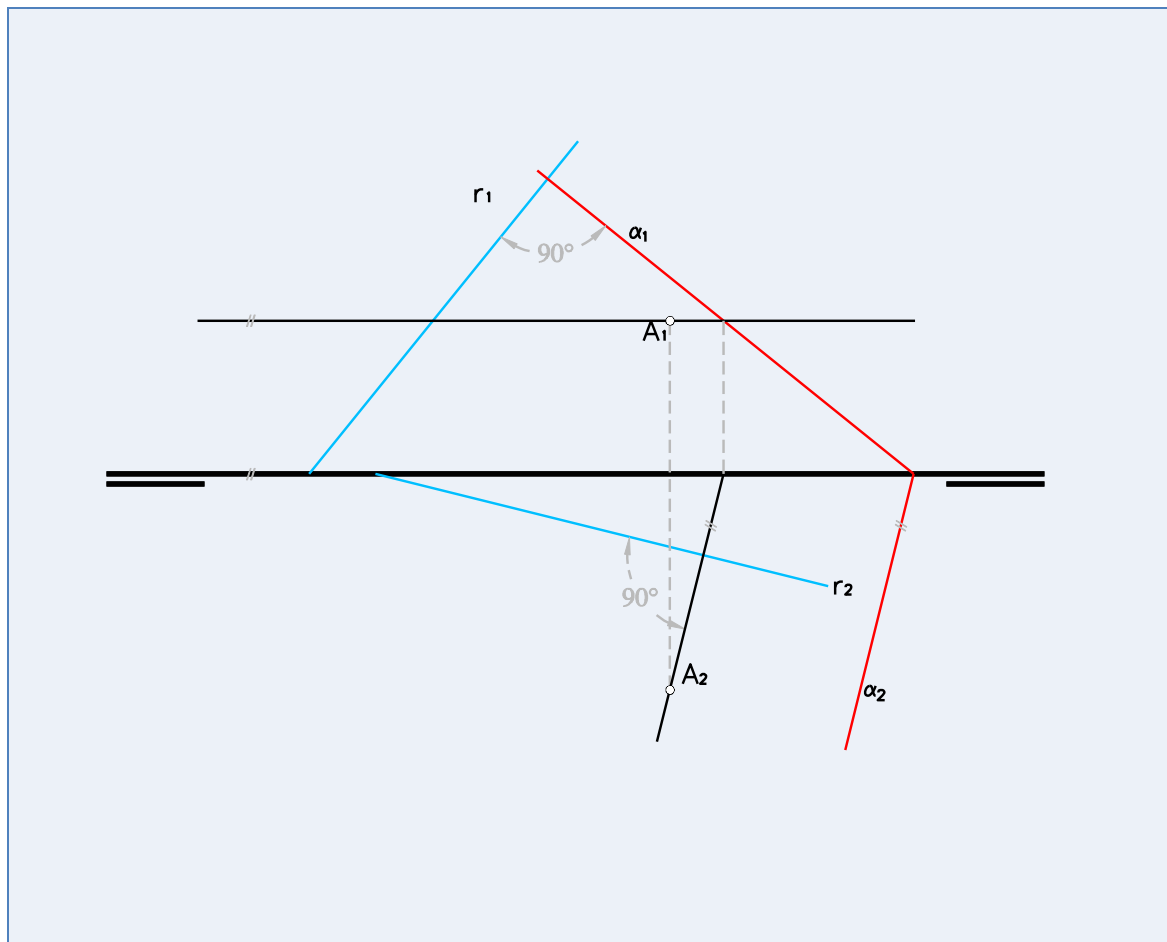


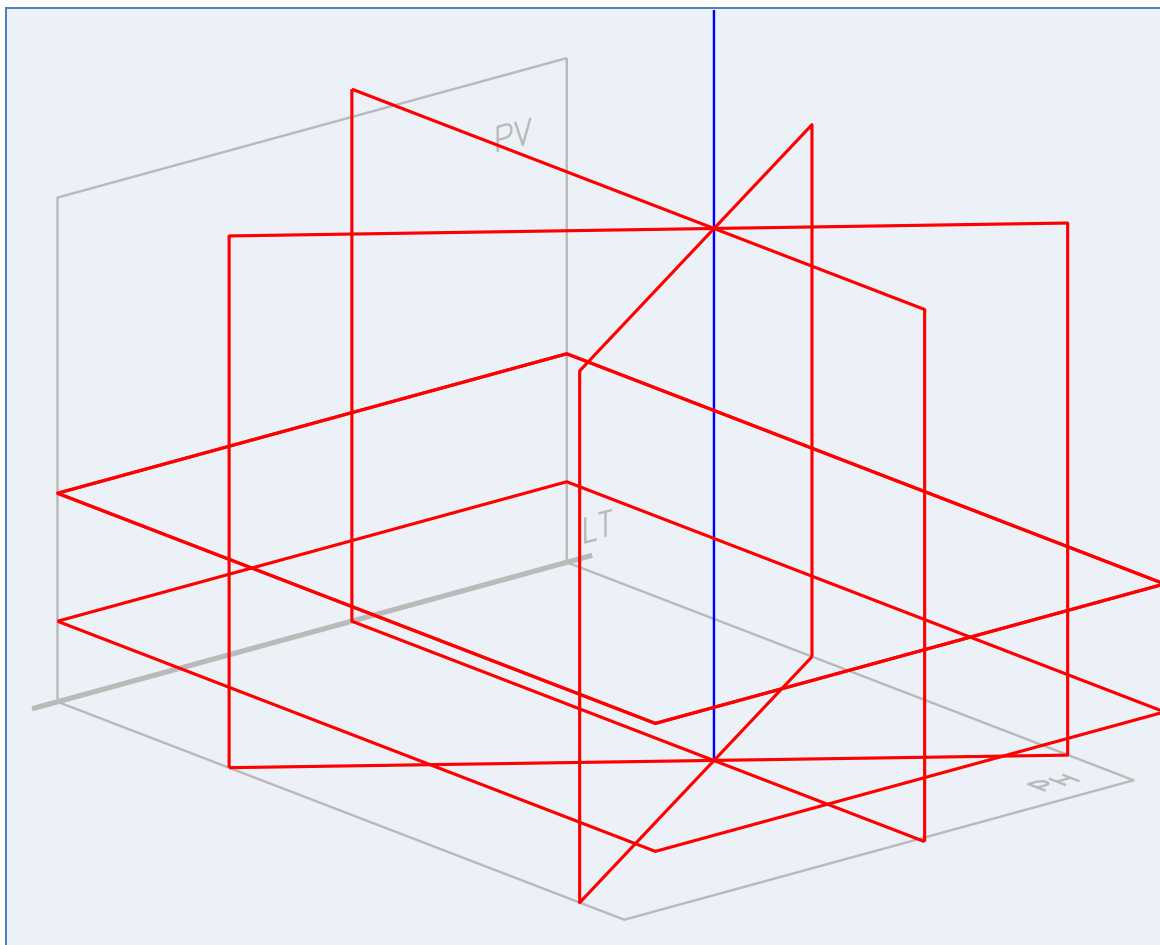
Figura 113. Plano perpendicular a una recta por un punto

### 8.3. Perpendicularidad entre planos

Un plano es perpendicular a otro si contiene una recta perpendicular a éste.

Grados de libertad de la solución:

- sin condiciones: infinitos planos.
- por un punto: infinitos planos.



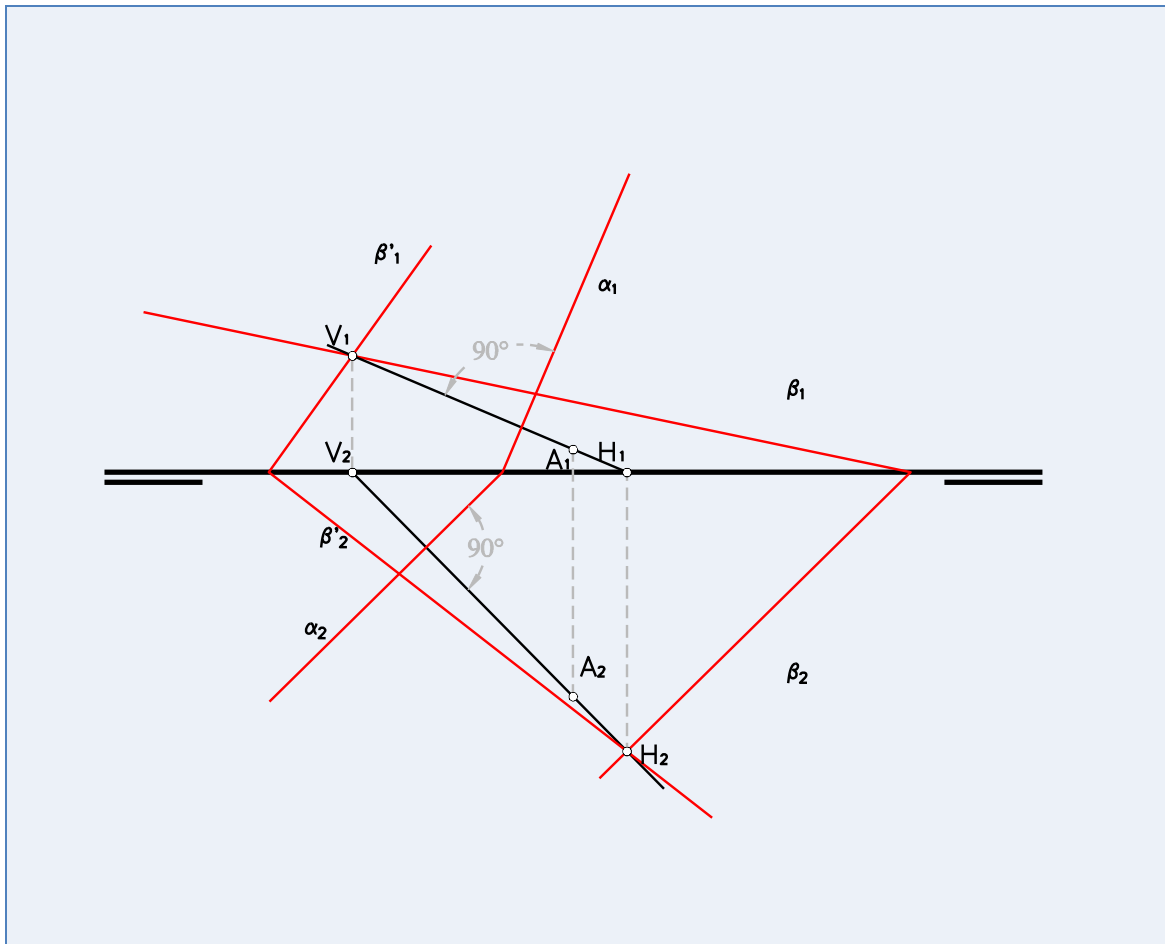
**Figura 114. Perpendicularidad entre planos 3D**

Un plano será perpendicular a otros dos, alfa y beta, si es perpendicular a la recta de intersección de ambos.

Grados de libertad de la solución:

- sin condiciones: infinitos planos.
- por un punto: un plano.

## 8.3.1. Planos perpendiculares a otro por un punto

**Figura 115. Planos perpendiculares a otro por un punto**

8.3.2. Plano perpendicular a otros dos por un punto

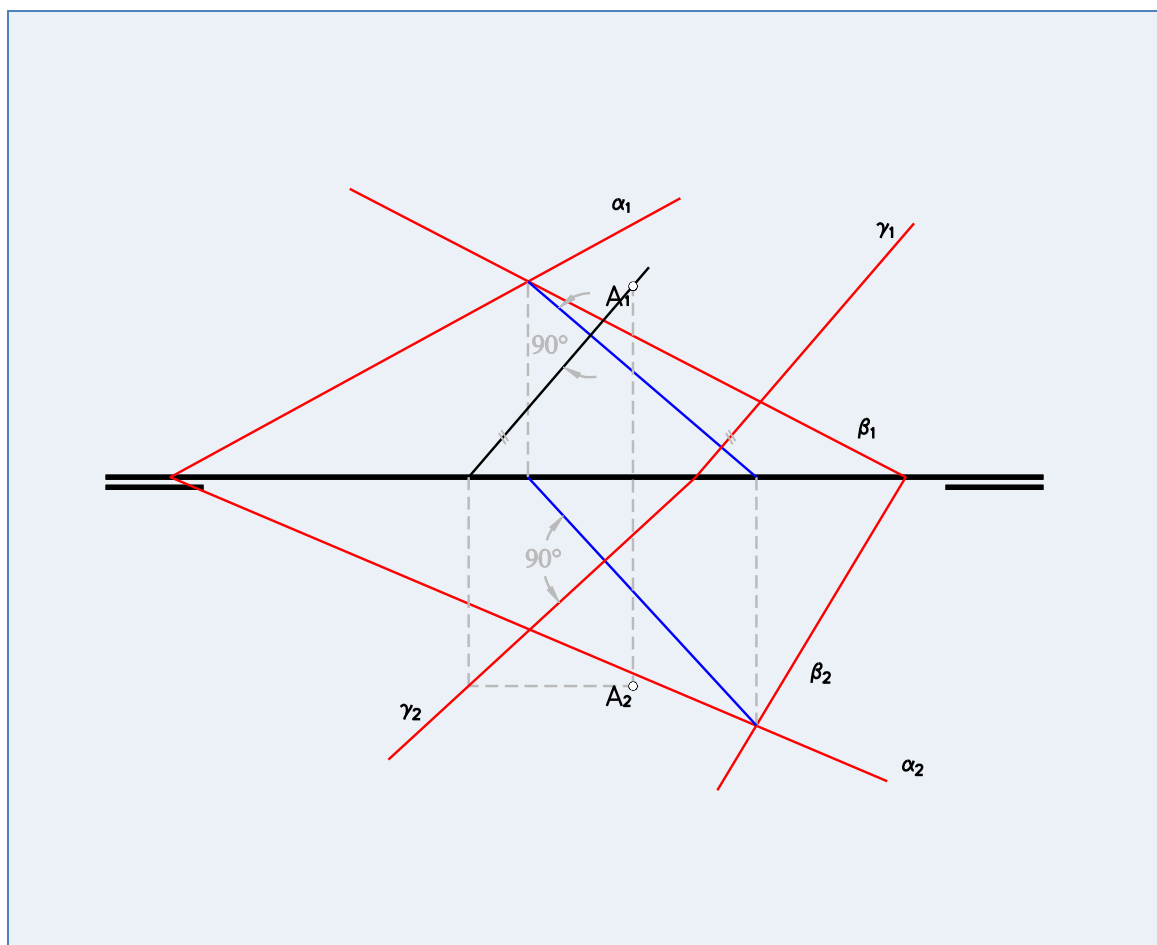


Figura 116. Plano perpendicular a otros dos por un punto

# Tema 9

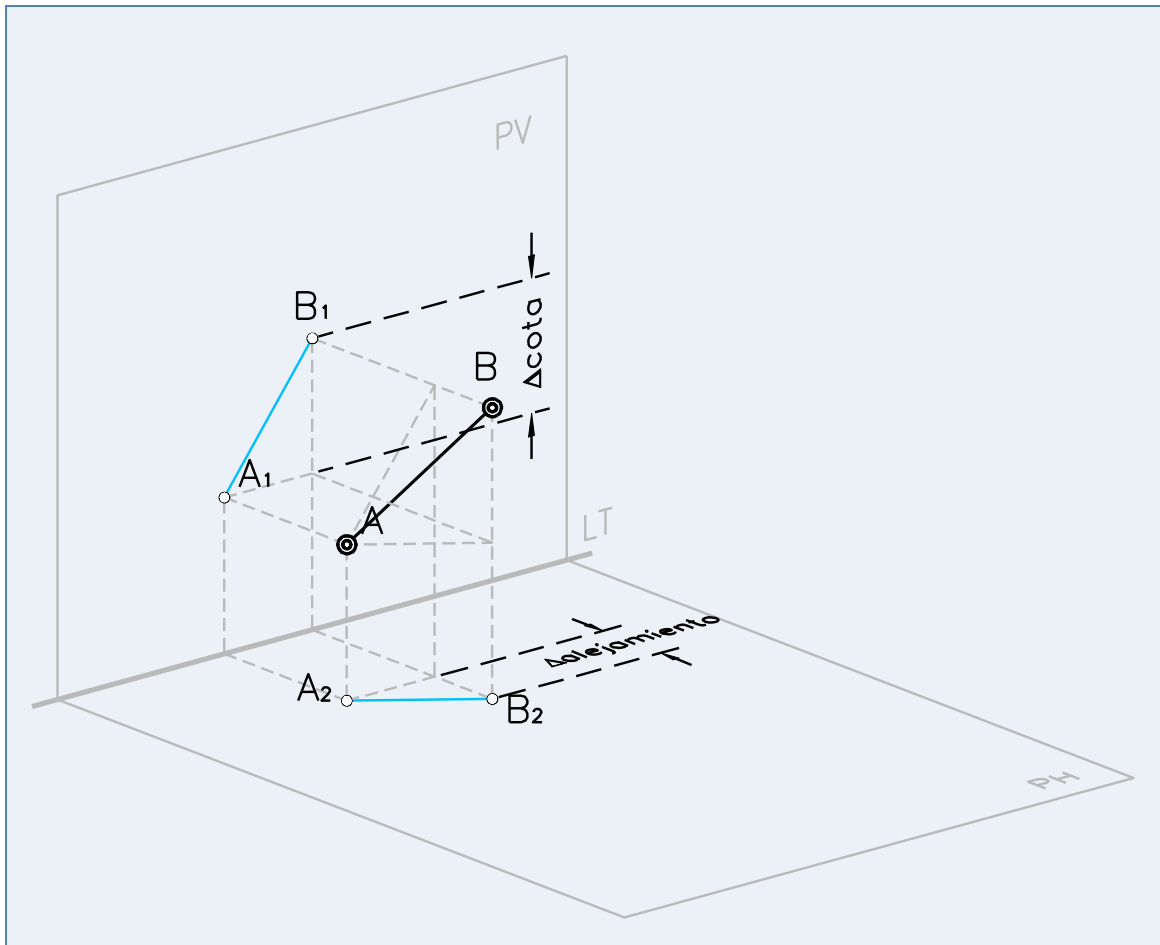
## Verdaderas magnitudes

### (distancias)

#### 9.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos **A** y **B** es la línea recta que las une. Para medirla habrá de hallarse la verdadera magnitud del segmento.





**Figura 117. Distancia entre dos puntos 3D**

En la figura se puede observar que la distancia **AB** es la hipotenusa del triángulo rectángulo **ABb1** ó del **ABd1**; de ahí se deduce que la verdadera magnitud de un segmento cualquiera **AB** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son:

- la proyección horizontal del segmento y la diferencia de cotas de los puntos **A** y **B**:  $\Delta$ alejamiento
- la proyección vertical del segmento y la diferencia de alejamientos de los puntos **A** y **B**:  $\Delta$ cota

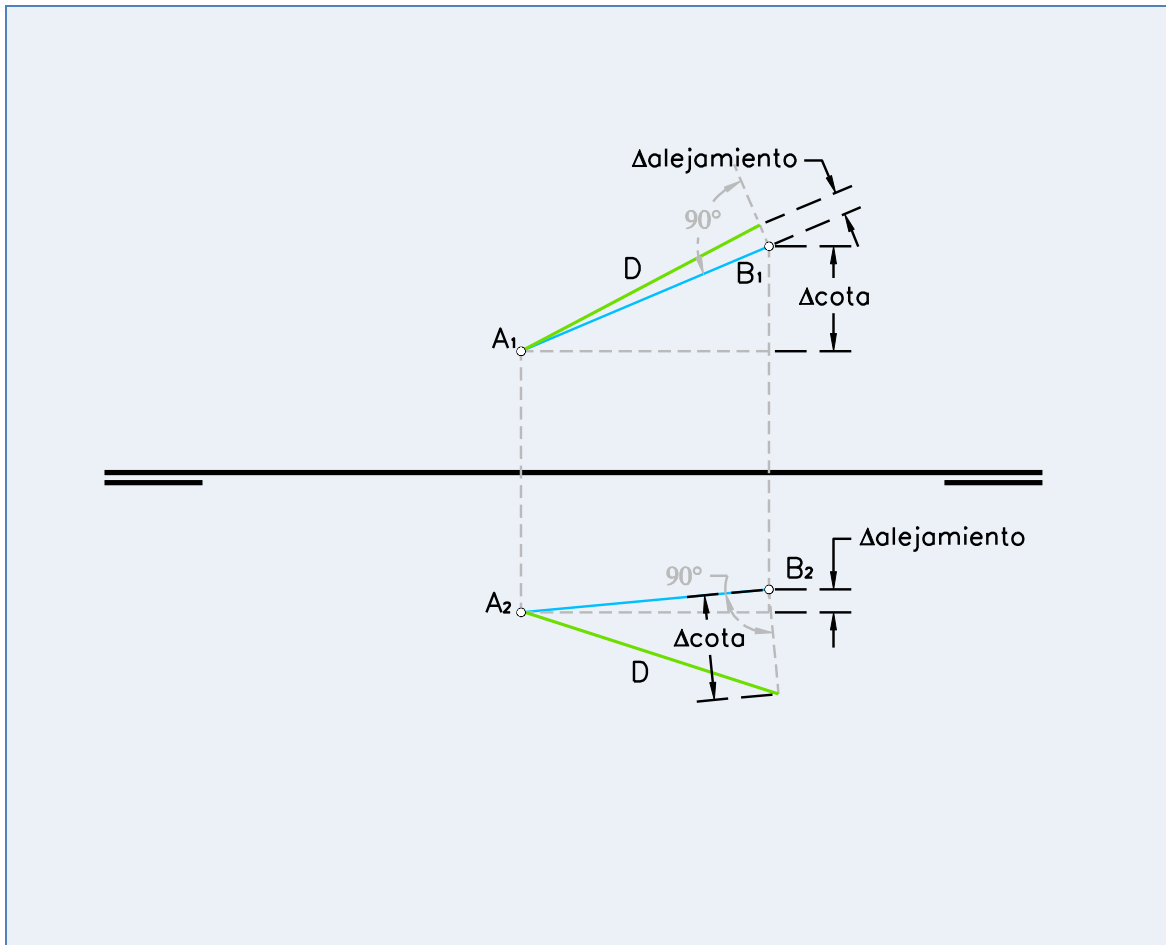
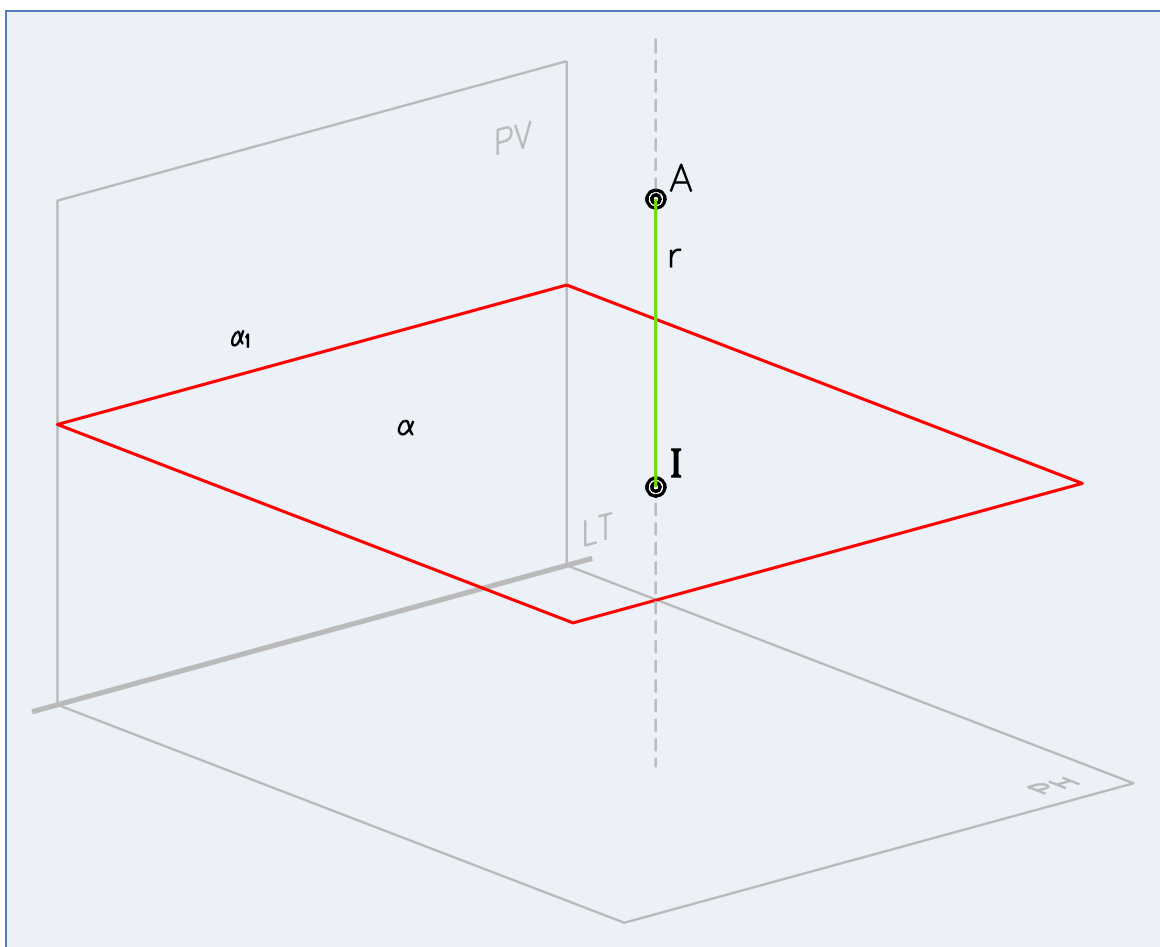


Figura 118. Distancia entre dos puntos

## 9.2. Distancia de un punto a un plano

Para hallar la distancia de un punto a un plano habrá de medirse el segmento perpendicular al plano desde el punto hasta la intersección.

1. Por el punto **A** se traza la recta **r** perpendicular al plano  $\alpha$ .
2. Se determina el punto de intersección **I** de la recta **r** y el plano  $\alpha$ .
3. El segmento **AI** será la distancia buscada.



**Figura 119. Distancia de un punto a un plano 3D**

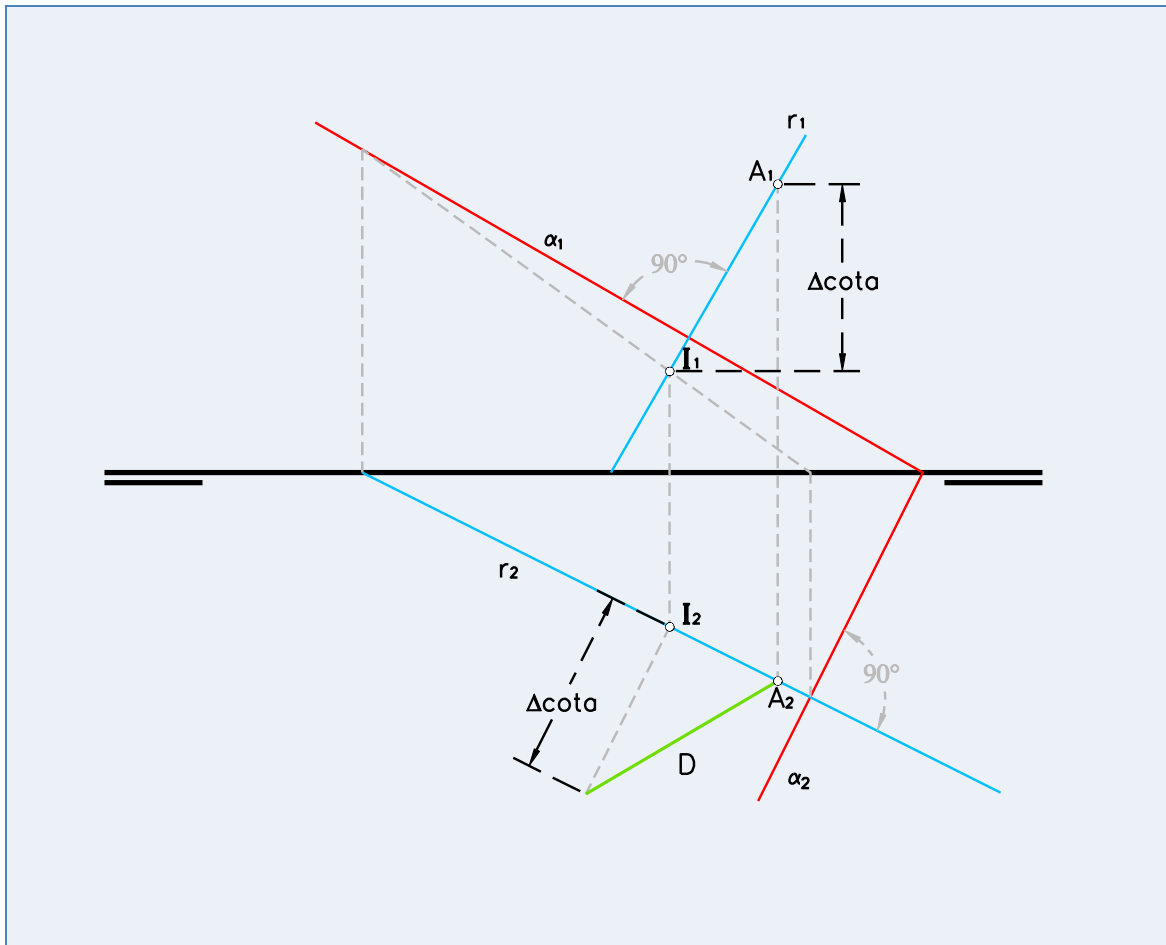


Figura 120. Distancia de un punto a un plano

### 9.3. Distancia de un punto a una recta

Dado el punto **A** y la recta **r**; para determinar la distancia del punto a la recta se procederá a encontrar el segmento de mínima separación entre el punto y la recta de la siguiente manera:

1. Por el punto **A** se traza el plano  $\alpha$  perpendicular a la recta **r**.
2. Se determina el punto **I**: intersección de la recta **r** y el plano  $\alpha$ .
3. El segmento **AI** será la distancia buscada.

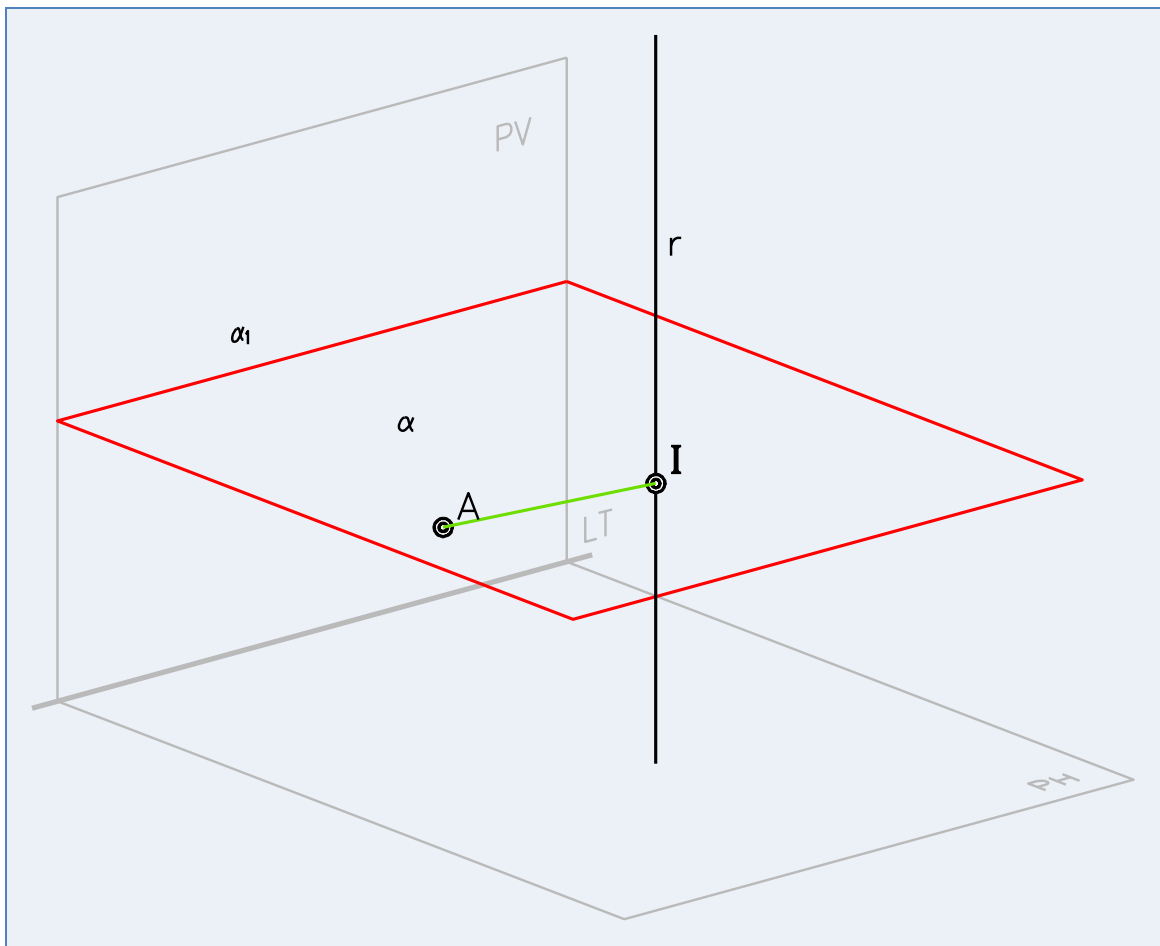


Figura 121. Distancia de un punto a una recta 3D

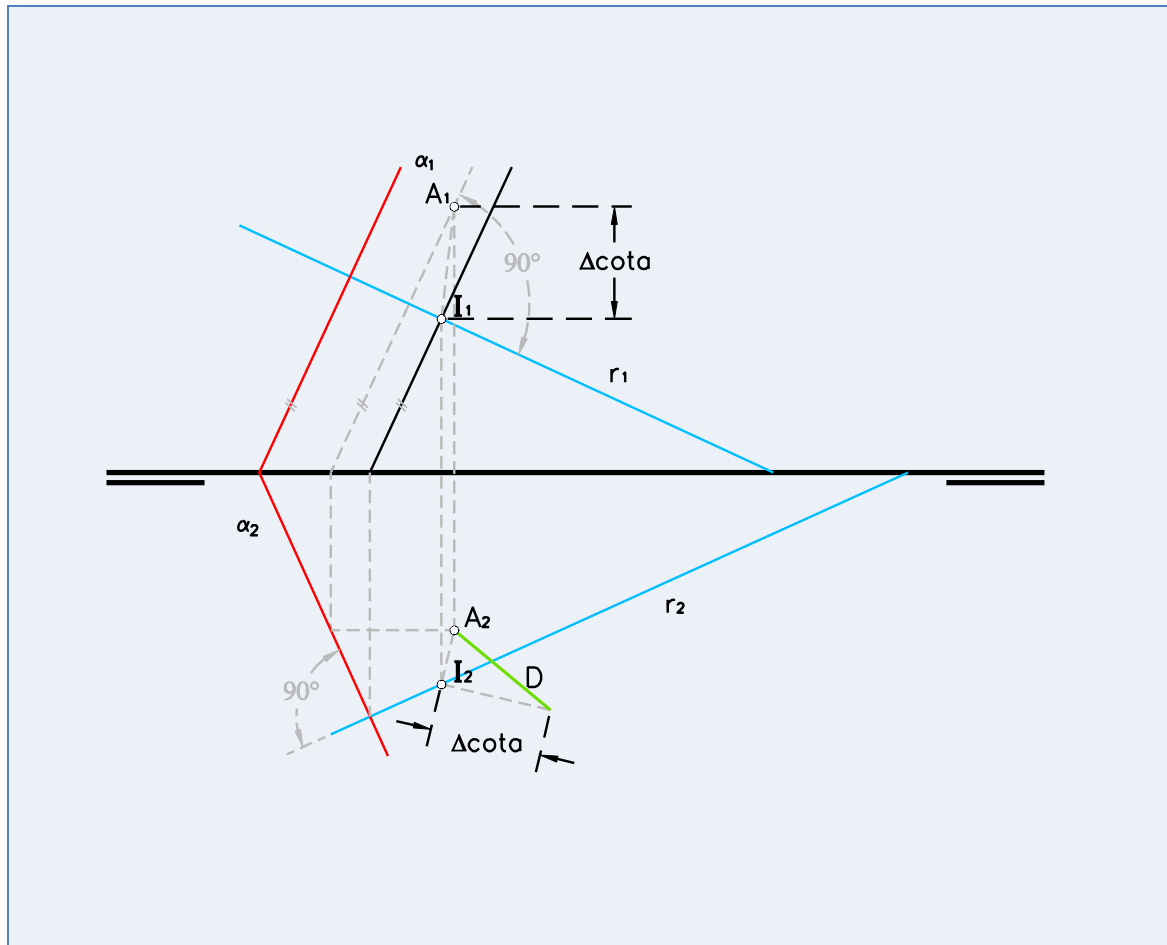


Figura 122. Distancia de un punto a una recta

## 9.4. Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas entre sí necesariamente deberá medirse sobre cualquiera de los planos perpendiculares a las dos rectas, de la siguiente manera:

1. Se traza un plano  $\alpha$  perpendicular a una de las rectas.
2. Se determinan los puntos de intersección (**I**, **J**) de las rectas dadas con el plano  $\alpha$
3. El segmento **I-J** será la distancia buscada.

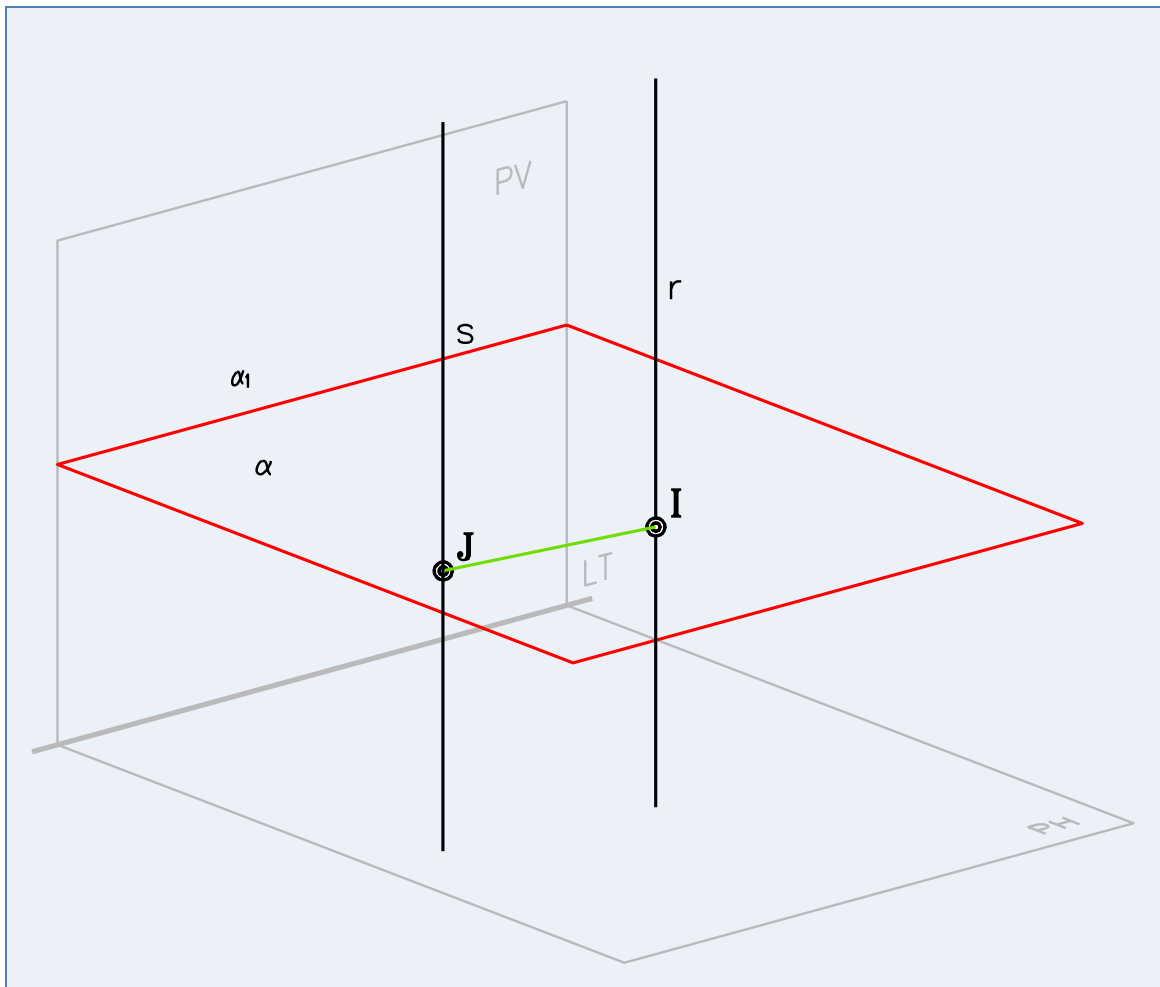


Figura 123. Distancia entre dos rectas paralelas 3D

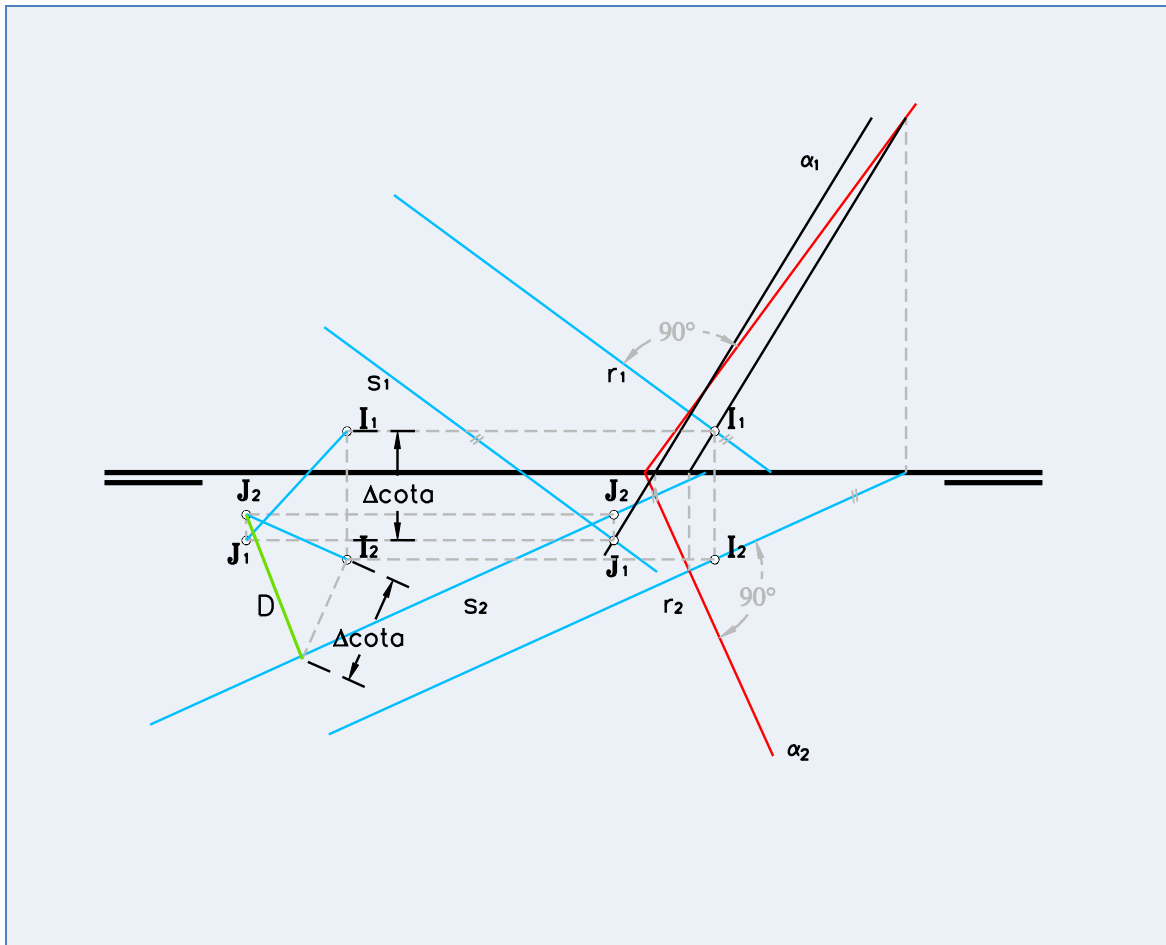


Figura 124. Distancia entre dos rectas paralelas



## 9.5. Distancia entre dos planos paralelos

La distancia entre dos planos paralelos se hallará sobre una recta perpendicular a ambos planos, con las siguientes operaciones haciendo los planos paralelos  $\alpha$  y  $\beta$ :

1. Se traza una recta  $r$  perpendicular a los planos dados.
2. Se determinan los puntos de intersección (**I**, **J**) de la recta  $r$  con dichos planos.
3. El segmento **I-J** será la distancia buscada.

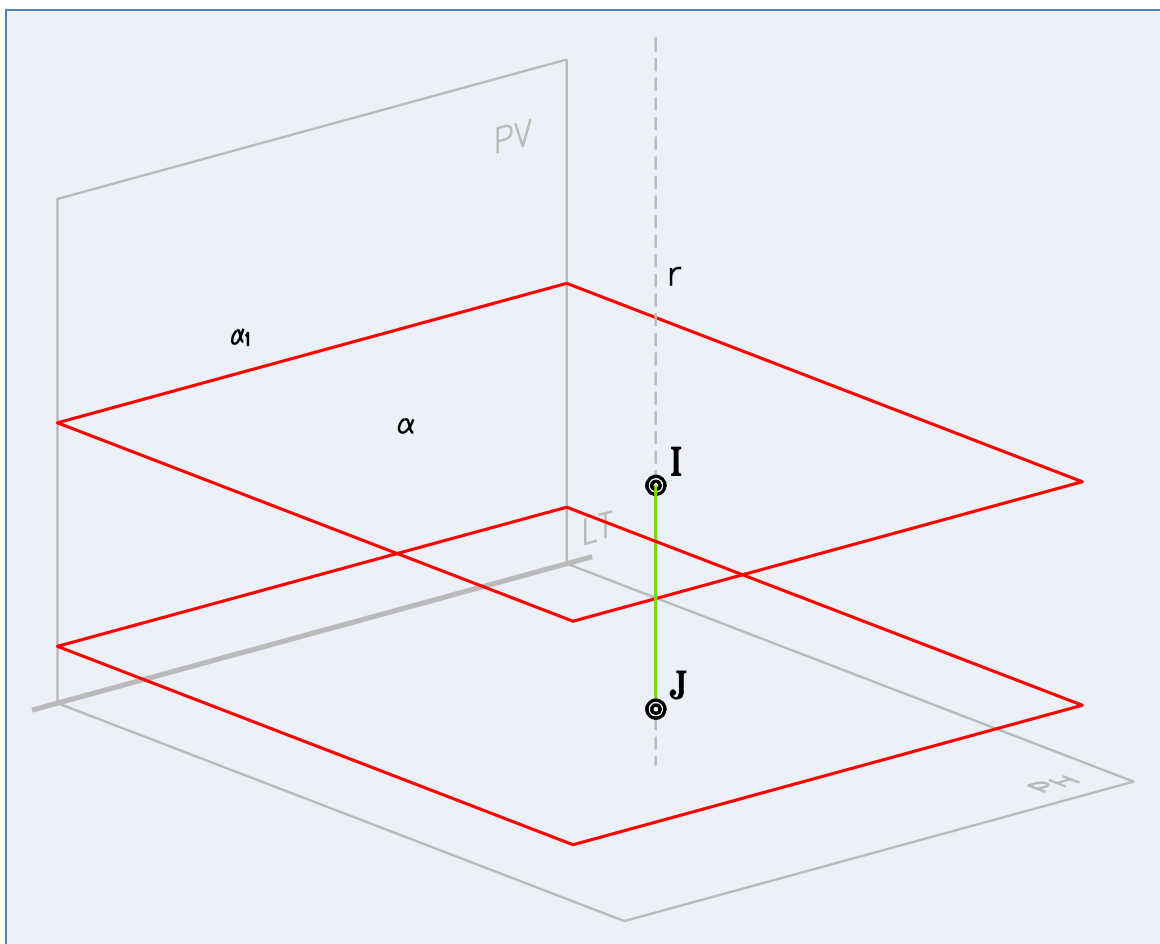


Figura 125. Distancia entre dos planos paralelos 3D

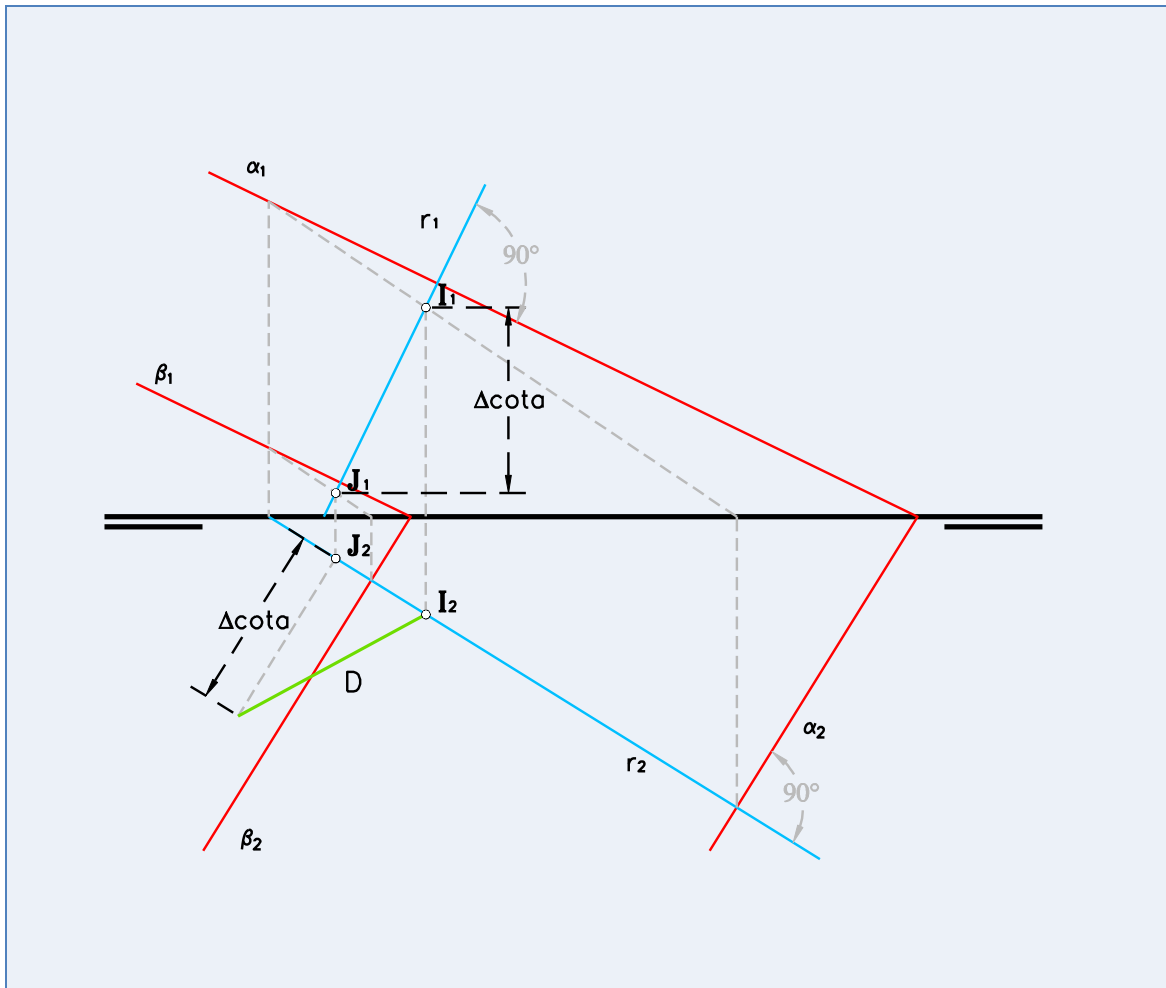


Figura 126. Distancia entre dos planos paralelos

## 9.6. Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan

Para hallar la mínima distancia entre dos rectas que se cruzan se requieren más pasos que en el resto de distancias, si bien es sencillo generando un plano auxiliar que contenga una de las rectas y la paralela de la otra recta.

Siendo las rectas  $r$  y  $s$  sigamos los siguientes pasos:

Para determinar dicho segmento (**3-4**) se procederá de la siguiente manera:

1. Por un punto **A** de la recta  $s$  se traza una recta **r1** paralela a la recta dada  $r$ .
2. Se determina el plano  $\alpha$  formado por la recta dada  $s$  y la recta **r1**.
3. Por un punto **1** de la recta dada  $r$  se traza la recta **r2** perpendicular al plano  $\alpha$ .
4. Se determina el punto **2** de intersección de la recta **r2** y el plano  $\alpha$ .
5. Por el punto **2** se traza la recta **r3** paralela a la recta  $r$  dada. Resultando el punto **3** en el corte con la recta  $s$ .
6. Por el punto **3** se traza la recta **r4** paralela a la recta **r2**. Resultando el punto **4** en el corte con la recta  $r$ .
7. El segmento **3-4**, situado sobre la recta **r4**, será la distancia buscada.

Como puede apreciarse si únicamente queremos resolver la distancia que separa ambas rectas bastará con identificar los puntos **1** y **2**, ya que mantienen la misma distancia que los puntos **3** y **4**.

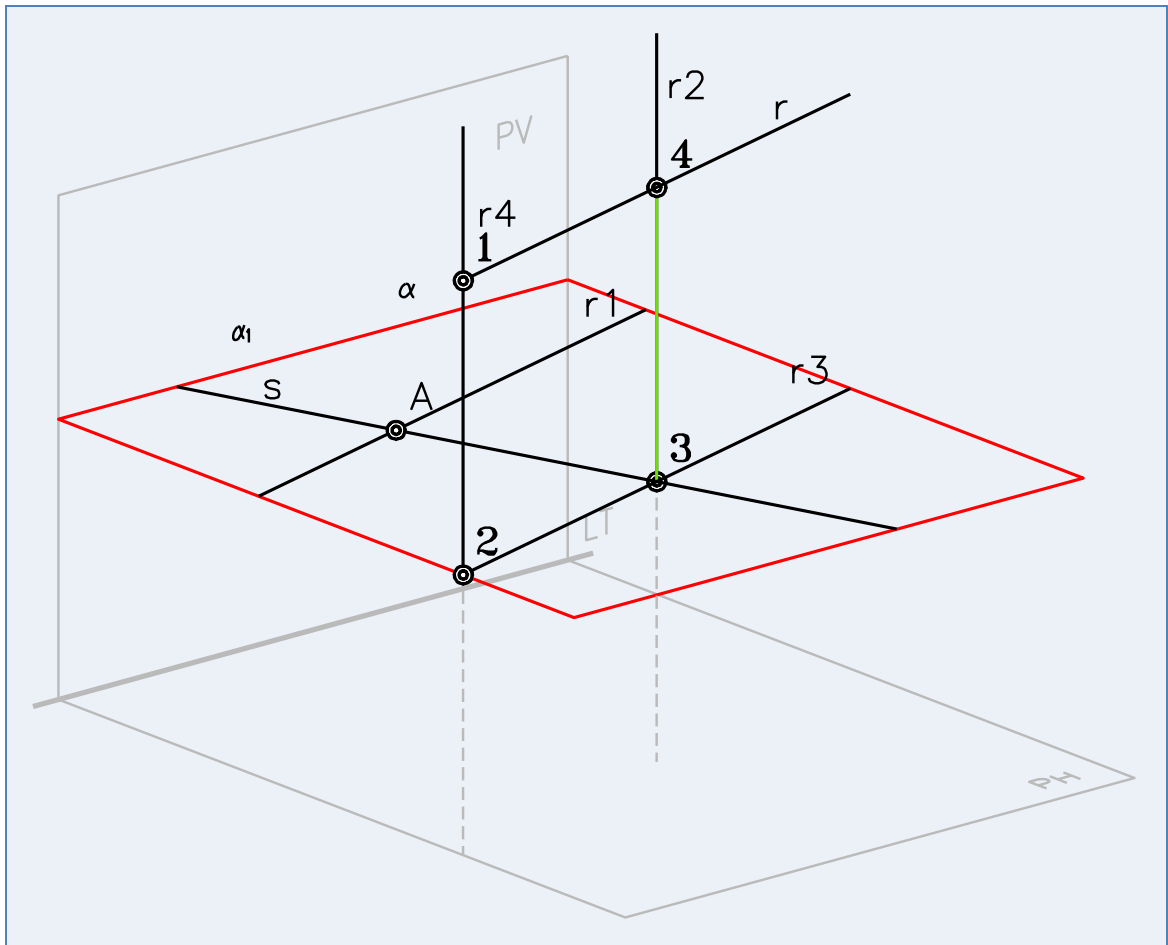


Figura 127. Distancia entre dos rectas que se cruzan 3D

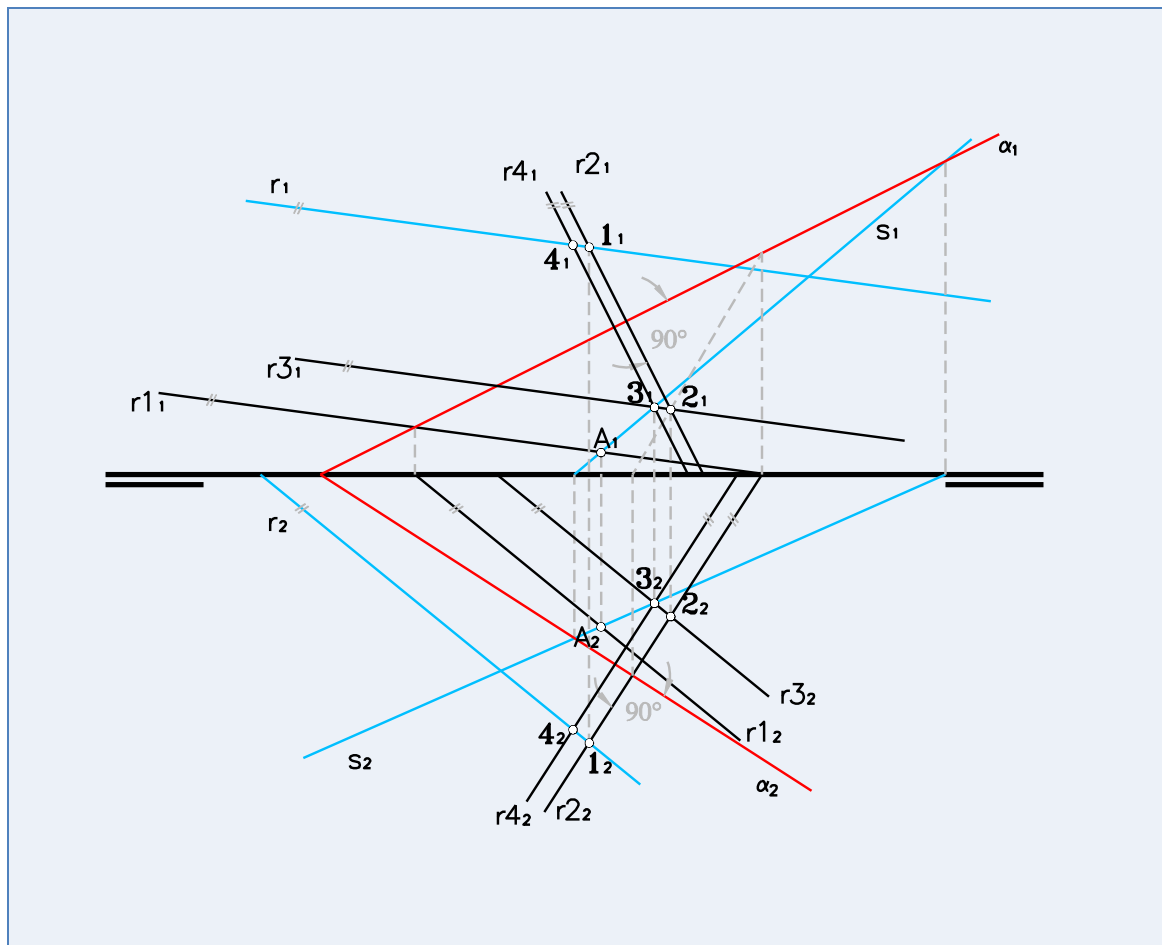


Figura 128. Distancia entre dos rectas que se cruzan

# Índice de Figuras

FIGURA 1. ABATIMIENTO DE PLANOS DE PROYECCIÓN .....	3
FIGURA 2. REPRESENTACIÓN 3D DEL PUNTO .....	6
FIGURA 3. REPRESENTACIÓN DEL PUNTO .....	6
FIGURA 4. ALFABETO DEL PUNTO 3D .....	7
FIGURA 5. ALFABETO DEL PUNTO .....	8
FIGURA 6. COTA Y ALEJAMIENTO 3D .....	9
FIGURA 7. COTA Y ALEJAMIENTO .....	10
FIGURA 8. VISTA 3D DE LOS PLANOS PROYECTANTES .....	11
FIGURA 9. REPRESENTACIÓN 3D DE UN PUNTO DADO .....	12
FIGURA 10. REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO DADO .....	13
FIGURA 11. ALFABETO DE LOS PUNTOS REPRESENTACIÓN REAL .....	14
FIGURA 12. REPRESENTACIÓN 3D DE LA RECTA .....	16
FIGURA 13. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA .....	17
FIGURA 14. PUNTOS NOTABLES DE LA RECTA .....	18
FIGURA 15. CUADRANTES POR LOS QUE PASA UNA RECTA. EJEMPLO 1 .....	19
FIGURA 16. CUADRANTES POR LOS QUE PASA UNA RECTA. EJEMPLO 2 .....	20
FIGURA 17. RECTA HORIZONTAL 3D .....	21
FIGURA 18. RECTA HORIZONTAL .....	22
FIGURA 19. RECTA HORIZONTAL EN EL PLANO HORIZONTAL .....	23
FIGURA 20. RECTA FRONTAL 3D .....	24
FIGURA 21. RECTA FRONTAL .....	25
FIGURA 22. RECTA FRONTAL EN EL PLANO VERTICAL .....	26
FIGURA 23. RECTA PARALELA A LA LÍNEA DE TIERRA 3D .....	27
FIGURA 24. RECTA PARALELA A LA LÍNEA DE TIERRA .....	28
FIGURA 25. RECTA QUE CORTA A LT 3D .....	29
FIGURA 26. RECTA QUE CORTA A LT .....	30
FIGURA 27. RECTA QUE CORTA A LT DEL PRIMER BISECTOR .....	31
FIGURA 28. RECTA QUE CORTA A LT DEL SEGUNDO BISECTOR .....	32
FIGURA 29. RECTA DE PERFIL 3D .....	33
FIGURA 30. RECTA DE PERFIL .....	34
FIGURA 31. RECTA VERTICAL 3D .....	35
FIGURA 32. RECTA VERTICAL .....	36
FIGURA 33. RECTA DE PUNTA 3D .....	37
FIGURA 34. RECTA DE PUNTA .....	38
FIGURA 35. RECTA EN POSICIÓN GENERAL 3D .....	39
FIGURA 36. RECTA EN POSICIÓN GENERAL .....	40
FIGURA 37. RECTAS QUE SE CORTAN 3D .....	41
FIGURA 38. RECTAS QUE SE CORTAN .....	42
FIGURA 39. RECTAS PARALELAS .....	43
FIGURA 40. REPRESENTACIÓN DE UN PLANO 3D .....	46
FIGURA 41. REPRESENTACIÓN DE UN PLANO .....	47
FIGURA 42. PERTENENCIA DE UN PUNTO A UN PLANO 3D .....	48
FIGURA 43. PERTENENCIA DE UN PUNTO A UN PLANO .....	49
FIGURA 44. PERTENENCIA DE UN PUNTO A UN PLANO MEDIANTE RECTA HORIZONTAL .....	50

FIGURA 45. PERTENENCIA DE UN PUNTO A UN PLANO MEDIANTE RECTA FRONTAL .....	51
FIGURA 46. PLANO HORIZONTAL 3D .....	52
FIGURA 47. PLANO HORIZONTAL .....	53
FIGURA 48. PLANO FRONTAL 3D .....	54
FIGURA 49. PLANO FRONTAL .....	55
FIGURA 50. PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL 3D.....	56
FIGURA 51. PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL.....	57
FIGURA 52. PLANO PROYECTANTE VERTICAL 3D .....	58
FIGURA 53. PLANO PROYECTANTE VERTICAL .....	59
FIGURA 54. PLANO DE PERFIL 3D .....	60
FIGURA 55. PLANO DE PERFIL .....	61
FIGURA 56. PLANO RAMPA 3D .....	62
FIGURA 57. PLANO RAMPA .....	63
FIGURA 58. PLANO PERPENDICULAR AL PRIMER BISECTOR 3D .....	64
FIGURA 59. PLANO PERPENDICULAR AL PRIMER BISECTOR.....	65
FIGURA 60. PLANO PERPENDICULAR AL SEGUNDO BISECTOR 3D .....	66
FIGURA 61. PLANO PERPENDICULAR AL SEGUNDO BISECTOR.....	67
FIGURA 62. PLANO EN POSICIÓN GENERAL OBLICUA 3D .....	68
FIGURA 63. PLANO EN POSICIÓN GENERAL OBLICUA .....	69
FIGURA 64. RECTA HORIZONTAL DEL PLANO 3D .....	70
FIGURA 65. RECTA HORIZONTAL DEL PLANO.....	71
FIGURA 66. RECTA FRONTAL DEL PLANO 3D .....	72
FIGURA 67. RECTA FRONTAL DEL PLANO .....	73
FIGURA 68. RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE 3D .....	74
FIGURA 69. RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE.....	75
FIGURA 70. RECTA DE MÁXIMA INCLINACIÓN 3D.....	76
FIGURA 71. RECTA DE MÁXIMA INCLINACIÓN .....	77
FIGURA 72. INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS 3D .....	80
FIGURA 73. INTERSECCIÓN ENTRE DOS PLANOS.....	81
FIGURA 74. PLANOS QUE SE CORTAN FUERA DEL PAPEL. EJEMPLO 1 .....	82
FIGURA 75. PLANOS QUE SE CORTAN FUERA DEL PAPEL. EJEMPLO 2 .....	83
FIGURA 76. ENUNCIADO DE INTERSECCIÓN DE PLANOS DADOS POR PUNTOS.....	84
FIGURA 77. INTERSECCIÓN DE PLANOS DADOS POR PUNTOS.....	85
FIGURA 78. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PROYECTANTES .....	86
FIGURA 79. INTERSECCIÓN DE UN PLANO PARALELO A LT CON OTRO CUALQUIERA .....	87
FIGURA 80. INTERSECCIÓN DE UN PLANO DE PERFIL CON UN PLANO CUALQUIERA .....	88
FIGURA 81. INTERSECCIÓN DEL SEGUNDO BISECTOR CON UN PLANO CUALQUIERA.....	89
FIGURA 82. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS FUERA DEL PRIMER CUADRANTE.....	90
FIGURA 83. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS QUE PASAN POR EL MISMO PUNTO DE LA LT.....	91
FIGURA 84. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PARALELOS A LA LT .....	92
FIGURA 85. INTERSECCIÓN DE UN PLANO PARALELO A LA LT CON EL PRIMER Y SEGUNDO BISECTOR .....	93
FIGURA 86. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS CON TRAZAS HOMÓNIMAS PARALELAS.....	94
FIGURA 87. INTERSECCIÓN DE UN PLANO PERPENDICULAR AL SEGUNDO BISECTOR CON OTRO PLANO CUALQUIERA.....	95
FIGURA 88. INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS PERPENDICULARES AL SEGUNDO BISECTOR .....	96
FIGURA 89. INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO 3D.....	97
FIGURA 90. INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO .....	98
FIGURA 91. INTERSECCIÓN DE RECTA Y PLANO DEFINIDO POR TRES PUNTOS.....	99
FIGURA 92. RECTA QUE CORTA OTRAS TRES RECTAS QUE SE CRUZAN 3D.....	100

FIGURA 93. ENUNCIADO RECTA QUE CORTA A OTRAS TRES RECTAS QUE SE CRUZAN.....	101
FIGURA 94. RECTA QUE CORTA A OTRAS TRES RECTAS QUE SE CRUZAN .....	102
FIGURA 95. INTERSECCIÓN DE UN PLANO CON UNA RECTA PARALELA A LT.....	103
FIGURA 96. INTERSECCIÓN DE UN PLANO CON UNA RECTA QUE PASA POR LA LT.....	104
FIGURA 97. INTERSECCIÓN DE UN PLANO CON UNA RECTA DE PERFIL.....	105
FIGURA 98. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL .....	106
FIGURA 99. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PROYECTANTE VERTICAL.....	107
FIGURA 100. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PARALELO AL HORIZONTAL.....	108
FIGURA 101. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PARALELO AL VERTICAL .....	109
FIGURA 102. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PERPENDICULAR AL PRIMER BISECTOR .....	110
FIGURA 103. INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN PLANO PERPENDICULAR AL SEGUNDO BISECTOR.....	111
FIGURA 104. RECTAS PARALELAS .....	114
FIGURA 105. RECTA PARALELA A UN PLANO.....	115
FIGURA 106. PLANO PARALELO A UNA RECTA.....	116
FIGURA 107. PLANO QUE CONTIENE A UNA RECTA DADA Y ES PARALELO A OTRA .....	117
FIGURA 108. PLANOS PARALELOS 3D.....	118
FIGURA 109. PLANOS PARALELOS .....	119
FIGURA 110. DOS RECTAS PERPENDICULARES 3D .....	122
FIGURA 111. PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS .....	123
FIGURA 112. RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO POR UN PUNTO .....	124
FIGURA 113. PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA POR UN PUNTO .....	125
FIGURA 114. PERPENDICULARIDAD ENTRE PLANOS 3D .....	126
FIGURA 115. PLANOS PERPENDICULARES A OTRO POR UN PUNTO .....	127
FIGURA 116. PLANO PERPENDICULAR A OTROS DOS POR UN PUNTO .....	128
FIGURA 117. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS 3D.....	130
FIGURA 118. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.....	131
FIGURA 119. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO 3D.....	132
FIGURA 120. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.....	133
FIGURA 121. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA 3D .....	134
FIGURA 122. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.....	135
FIGURA 123. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS 3D.....	136
FIGURA 124. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS.....	137
FIGURA 125. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS 3D.....	138
FIGURA 126. DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS.....	139
FIGURA 127. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN 3D .....	141
FIGURA 128. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN .....	142



